

Universität Osnabrück  
WS 2003/04

## **Erstreichenschein-Auftrag**

zum Thema:  
**„Pluslandschaft“**

Veranstaltung: Mathematik Didaktik I  
Leiterin: Prof. Dr. I. Schwank

Verfasserin: Julia Atkinson  
Matr.Nr.

Abgabedatum: 09.01.2004

## Inhaltsverzeichnis

1. Beschreibung der Pluslandschaft	3
2. Bearbeitung verschiedenartiger Aufgaben mit Hilfe der Pluslandschaft	4
2.1. Lösungsfindung mit Hilfe des zählenden Verfahrens	4
2.2. Lösungsfindung mit Hilfe markanter Anzahlen	4
2.2.1. Die Anzahl 9	4
2.2.2. Die Anzahl 18	4
2.3. Lösungsfindung mit Hilfe von Zaubertürmen	5
2.3.1. Kraft der Fünf	5
2.3.2. Fastverdopplung	5
3. Analyse der Pluslandschaft	6
4. Beurteilung der Pluslandschaft	8
5. Anhang	10

## 1. Beschreibung der Pluslandschaft

Als Grundfläche für die Pluslandschaft dient ein Rechteck. Dieses ist in hundert gleich große Rechtecke eingeteilt, welche die Zahlen Null bis Achtzehn enthalten. Die Zahlen sind so verteilt, dass die Rechtecke, welche sich in den Diagonalen der Grundfläche befinden, immer die gleiche Ziffer aufweisen. Somit hat das Rechteck in der einen Ecke die Zahl Null und das in der gegenüberliegenden Ecke die Zahl Achtzehn. Die anderen beiden Ecken enthalten jeweils die Zahl Neun, welche aufgrund dessen, dass die Diagonale an dieser Stelle am längsten ist, in der Pluslandschaft am häufigsten vorkommt.

Auf diese Rechtecke werden zusätzlich noch Türme gestellt, welche in ihrer Länge den darauf stehenden Ziffern entsprechen. Stellt man auf jedes Rechteck der Grundfläche den dazu passenden Turm, so ergibt sich ein treppenförmiges Gebilde, welches die Pluslandschaft darstellt.

Die von mir erstellte Pluslandschaft besteht aus einer solchen 21\*21 cm großen Grundfläche, mit 99 Holztürmen. Auf dem Feld der Null befindet sich kein Turm. Die Länge der anderen Türme (in cm) entspricht den Ziffern auf den Rechtecken, auf denen sie stehen.

Um mit diesem Material zu arbeiten werden Männchen benötigt, mit denen man die Treppen der Pluslandschaft auf- und absteigen kann. Hierbei wird so verfahren, dass man sich zuerst auf den Turm begeben muss, welcher den ersten Summanden darstellt. Man kann hier so vorgehen, dass man von der Null an die Stufen zählend hinaufsteigt (wobei die Richtung egal ist) oder direkt von der Null auf den zutreffenden Turm springt. Die Addition wird dann durch ein erneutes Aufsteigen um die Anzahl der zweiten Summanden durchgeführt, was ebenfalls wieder stufenweise oder springend erfolgen kann. Natürlich ist es auch möglich, die vorgegebene Additionsaufgabe im Kopf umzuwandeln und so durch weniger Aufwand zum Ergebnis zu gelangen.

Zusätzlich gibt es zu der Pluslandschaft noch Zahlplättchen, welche auf die Türme bei der Einführung des Materials gelegt werden, um den Aufbau der Pluslandschaft näher zu bringen. Auch gibt es Farbplättchen, mit denen man bestimmte einem wichtig erscheinende Türme markieren kann. Diese stellen dann die sogenannten „Zaubertürme“ dar, auf welche man direkt von der Null springen kann.

## 2. Bearbeitung verschiedenartiger Aufgaben mit Hilfe der Pluslandschaft

### **2.1. Lösungsfindung mit Hilfe des zählenden Verfahrens**

1. Aufgabe:  $12 + 4 = ?$

Bei dem zählenden Verfahren findet das Kind die Lösung dadurch, dass es die einzelnen Summanden durch ein von Zählen begleitetes Hinaufsteigen der einzelnen Stufen addiert. Es könnte hierbei so verfahren, dass es bei dem ersten Summanden, der Zwölf, beginnt und mit dem Männchen von der Null aus zuerst neun Schritte nach rechts hinaufsteigt. Da dort die Treppe zuende ist, muss es die Richtung wechseln, um dann mit der Zehn bis hin zur Zwölf fortzufahren. Dort angekommen muss das Kind nun noch den zweiten Summanden addieren. Es wird hierbei bei seinem Zählvorgang wieder mit der Eins beginnen und geradeaus hinaufsteigen bis es bei der Vier angekommen ist. Dieser Turm stellt dann den Ergebnisturm dar. Um nun letztendlich zu erfahren, welche Anzahl dieser Turm symbolisiert, ist es bei einem Kind, welches sich dem zählenden Verfahren bedient, erforderlich, dass es noch einmal von der Null aus mit dem Finger abzählt, um welche Ergebnismenge es sich bei dem Turm handelt. Hierbei wird es feststellen, dass der Turm die Anzahl 16 darstellt.

### **2.2. Lösungsfindung mit Hilfe der markanter Anzahlen**

#### 2.2.1. Die Anzahl 9

2. Aufgabe:  $7 + 4 = ?$

Die Anzahl Neun fällt bei der Pluslandschaft besonders ins Auge, da sie durch die meisten Türme symbolisiert wird, und somit die Eckpunkte der Viereckskonstruktion bildet. Aufgrund dessen kann sich das Kind bei geeigneten Aufgaben auf diese Anzahl berufen und mit dem Männchen direkt von der Null auf einen Neunerturm hüpfen. Bei der angegebenen Aufgabe muss das Kind dann noch überlegen, wie viele Schritte ihm bis zum Ergebnisturm fehlen. Hierbei muss es im Kopf rechnen, dass es mit der Neun bereits  $7+2$  Schritte gemacht hat. Da die Aufgabe aber  $7+4$  lautet, muss es nun noch  $4-2=2$  Schritte nach oben hinaufsteigen, um auf den Ergebnisturm, der 11 anzugelangen. ( $7+4 = (7+2) +2$ )

#### 2.2.2. Die Anzahl 18

3. Aufgabe:  $9 + 7 = ?$

Auch die Anzahl 18 ist bei der Pluslandschaft von Bedeutung, da sie durch den höchsten Turm symbolisiert wird. Aufgrund dessen, dass durch die Konstruktion der Pluslandschaft deutlich wird, dass die 9 die Hälfte von 18 ist, wird den Kindern klar sein, dass  $9+9$  die 18 ergibt. Aufgrund dessen können sie bei der angegebenen Aufgabe so verfahren, dass sie direkt von der Null auf die 18 springen. Nun müssen sie noch im Kopf rechnen, dass sie  $(9-9)+(9-7) = 0+2 = 2$  Schritte zu viel heraufgestiegen sind, und nun noch diese Anzahl wieder herabsteigen, um zu dem Ergebnis 16 zu gelangen.  $(9+7 = (9+9) - 2)$

### **2.3. Lösungsfindung mit Hilfe von Zaubertürmen**

#### 2.3.1. Kraft der Fünf

4. Aufgabe:  $6 + 11 = ?$

Um diese Lösung zu finden kann sich das Kind auf das Prinzip der „Kraft der Fünf“ berufen. Dieses ist möglich, wenn in der Pluslandschaft Zaubertürme existieren, welche die Fünferreihe darstellen. Diese sollten mit einer Markierung durch Farbplättchen hervorgehoben werden, womit es dem Kind ermöglicht wird, direkt von der Null auf solch einen Turm zu springen. In diesem Fall kann es mit dem Männchen direkt auf die Fünf springen. Nun hat es von der Sechs bereits Fünf subtrahiert, wobei der Rest, die Eins zurückgestellt wird. Nun kann es von der Elf zweimal die Fünf subtrahieren, indem es noch zwei Sprünge auf der Fünftreppe nach oben macht. Übrig bleibt hier ebenfalls die Eins. Zum Schluss muss es dann noch die fehlenden Einsen des ersten und zweiten Summanden durch zwei Schritte nach rechts hinaufsteigen, um zu dem Ergebnis 17 zu gelangen.  $(6+11 = (5+5+5) +1+1)$

#### 2.3.2. Fastverdopplung

5. Aufgabe:  $7 + 8 = ?$

Ein Kind, welches sich diesem Lösungsverfahren bedient, kann so verfahren, dass es sich auf eine ihm bekannte Nachbaraufgabe beruft. Im Falle dieser Aufgabe sind die Aufgaben  $7+7=14$  und  $8+8=16$  zu nennen, welche dem Kind bekannt sein könnten. Diese bekannten Rechnungen sollten in der Pluslandschaft durch Zaubertürme hervorgehoben sein. Im Falle dieser Aufgabe ist es dann möglich, dass das Kind direkt von der Null auf den Zauberturm, welcher die Aufgabe  $7+7=14$  darstellt, hüpf. Danach muss es nur noch überlegen, wie viel noch zu dem endgültigen Ergebnis fehlen. Hierbei muss das Kind im Kopf die Rechnung  $(7-7)+(8-7) = 0+1 = 1$  durchführen, um zu der Erkenntnis zu gelangen, dass es nun noch einen

Schritt geradeaus nach oben hinaufsteigen muss, um zu dem Ergebnisturm, der 15, zu gelangen.  $(7+8) = (7+7) + 1$

### 3. Analyse der Pluslandschaft

Die Pluslandschaft erweist sich aufgrund ihres äußeren, den vielen Holztürmen, welche sich aufgrund ihrer Ähnlichkeit zu Kinderspielzeugen als lebensnah erweisen, sehr **ansprechend** für Kinder des ersten Schuljahres ist. Durch das Lösen von Additionsaufgaben anhand eines Herumspringens mit einem Männchen wird das **operative Prinzip** sehr stark betont. Die Kinder können das Material anfassen und ertasten und sich so die Lösungen der Rechenaufgaben erarbeiten. Dieser spielerische Umgang wirkt sich motivierend auf die Kinder aus.

Doch nicht nur die Lernbereitschaft der Kinder wird durch eine derartige Bearbeitung von Additionsaufgaben Rechnung getragen. Auch wird der **funktionale Aspekt** von Problemlösestrategien mit der Pluslandschaft betont. Den Kindern wird die Addition hier als ein dynamisches Ereignis, ein Prozess, veranschaulicht. Durch das Material wird von dem in der Schule üblichen Auswendiglernen von einzelnen Summen abgesehen, und die Aufmerksamkeit nicht dem Ergebnis, sondern dem Vorgang der Addition gewidmet. Hierbei befindet sich das Kind direkt in dem Geschehen, da es diesen Vorgang selbst durch das Bewegen des Männchens vollziehen muss. Dadurch, dass es die Aufgaben so löst, dass es erst die Anzahl des ersten Summanden hinaufsteigt, und dann die Addition ausführt, indem es die Anzahl des zweiten Summanden zusätzlich die Treppe hochspringt, wird deutlich, dass die Addition als eine Art „Zusammenfügen“ der angegebenen Mengen zu verstehen ist.

Dadurch dass die Pluslandschaft ein und dieselbe Ziffer mehrmals enthält, gibt es viele **unterschiedliche Lösungswege** für eine Aufgabe, welche die Kinder ergründen können. Dieses führt dazu, dass sie in der Schule in einem Unterrichtsgespräch mehrere Lösungen austauschen können, und so jedes Kind die Möglichkeit hat, sich den eigenen bequemsten Lösungsweg auszusuchen. Auch bemerken Kinder im Laufe ihrer Arbeit mit der Pluslandschaft schnell, dass manche Wege, die zu einer Lösung eingeschlagen werden, sehr zeitaufwendig und kompliziert sind. Aufgrund dessen werden sie dazu angehalten, sich einfachere Strategien zu überlegen, um zu der Lösung zu gelangen, was wiederum eine Vielfalt von Lösungsmöglichkeiten mit sich bringt.

Neben den unterschiedlichen Lösungswegen bietet die Pluslandschaft auch **unterschiedliche Bearbeitungsmöglichkeiten**. Es besteht die Möglichkeit, dass die Kinder Türme, welche die gleiche Menge darstellen, oder solche, die ihnen einige Rechenvorgänge erleichtern, mit

**Farbplättchen** versehen. Somit können sie sich die konkreten Anzahlen, welche die einzelnen Türme darstellen, besser merken. Es besteht aber auch die Möglichkeit, dass die schlichten holzfarbenen Türme beibehalten werden, und die Kinder somit immer wieder von Neuem aufgefordert werden, sich die Mengen zu erschließen. Aufgrund dieser unterschiedlichen Bearbeitungsmöglichkeiten kann man mit der Pluslandschaft in verschiedenen Schwierigkeitsgraden arbeiten, wodurch sie sowohl bei schwächeren Schülern, welche sich zusätzlich an den farbigen Plättchen orientieren können, und auch bei den stärkeren einsetzbar ist.

Wie bereits oben angeführt werden bei der Pluslandschaft die Anzahlen Neun und Achtzehn durch ihre Stellung hervorgehoben. Die Neun bildet die Mitte und somit die rechte und linke Ecke und die Achtzehn wird durch den höchsten Turm vertreten. Die anderen Ziffern werden nicht markant dargestellt. Aufgrund dessen wird hier auch nicht vom Prinzip der „**Kraft der Fünf**“ Gebrauch gemacht, da die Fünferreihe nicht hervorsticht. Aufgrund dessen werden die Kinder auch nicht auf den **Zehnerübergang** aufmerksam gemacht. Jedoch besteht die Möglichkeit hier von den farbigen Legeplättchen Gebrauch zu machen, und die Fünferreihe andersfarbig zu gestalten. So wird es den Kindern ermöglicht, bestimmte Additionsaufgaben dadurch zu vereinfachen, dass sie einzelne „Fünferpakete“ bilden können (siehe Aufg. zu „Kraft der Fünf“). Auch werden sie auf den Zehnerübergang aufmerksam gemacht. Zusätzlich trägt eine farbige Fünferreihe dazu bei, den Ergebnisturm, auf dem sich das Männchen befindet, schneller zu identifizieren.

Ebenfalls lassen die **Zahlplättchen**, welche bei der Einführung des Materials die Mengen, welche die Türme darstellen, bezeichnen, eine unterschiedliche Bearbeitungsweise zu. Bei der Einführung des Materials dienen sie dazu, sich zuerst über den Aufbau und die Struktur der Pluslandschaft klar zu werden. Jedoch sollten sie nach einiger Zeit weggenommen werden, um die Mengen nicht mehr durch die Zifferschreibweise vorzugeben, sondern nur noch durch die Länge der Holztürme festzumachen. Die Kinder werden nun also gezwungen, selbst zu überlegen, welche Anzahlen die einzelnen Türme vertreten. Dies wird zunächst durch ein einfaches Abzählen von der Null an aufwärts geschehen. Doch mit der Zeit dauert ihnen dieses zu lange und sie werden versuchen, die Anzahlen schneller zu erschließen. Dies kann so geschehen, dass sie sich einzelne Höhen oder markante Stellen, wie zum Beispiel die der Neun auf der Hälfte und der Achtzehn als höchster Turm, merken. Auch können sie durch einen Vergleich zum Beispiel erkennen, dass das Zweierstäbchen halb so hoch ist wie das Viererstäbchen, oder dass die zweithöchsten Stäbchen die Zahl Siebzehn aufgrund des höheren Achtzehnerstäbchens darstellen müssen. Durch diese Überlegungen wird das

**Mengenverständnis** der Kinder gefördert. Sie verbinden also mit einer Anzahl nicht nur die dazugehörige Ziffer, sondern begreifen, welche Menge sich dahinter verbirgt. Jedoch hat man auch die Möglichkeit, bei schwächeren Kindern die Zahlplättchen für längere Zeit beizubehalten, und ihnen so mehr Zeit zu geben, sich mit dem neuen Material vertraut zu machen.

Bedingt dadurch, dass die Pluslandschaft bei anfänglichem Arbeiten ohne Zahlplättchen und farbige Legeplättchen etwas undurchsichtig ist, werden die Kinder die Aufgaben durch das zählende Prinzip lösen. Dies greift die Fähigkeit der Kinder des ersten Schuljahres auf und ist ein sicheres Mittel, mit der Pluslandschaft zur Lösung zu finden. Jedoch erweist es sich nach einiger Zeit besonders bei höheren Zahlen als sehr mühsam und zeitaufwendig. Aufgrund dessen beginnen die Kinder sich bestimmte Eckpunkte, wie die Neun und die Achtzehn zu merken, und finden so durch Vergleiche auch die Anzahlen der darüber und darunter liegenden Türme heraus, wodurch ihnen ein Abzählen erspart bleibt. Auch kann ihnen die Arbeit mit den Farbplättchen dazu verhelfen, bestimmte ihnen wichtig erscheinende Anzahlen, wie die Fünf und die Zehn, schneller greifbarer zu machen. Auf diese Art und Weise werden sie durch den Umgang mit dem Material langsam vom **zählenden** zum **denkenden Rechnen** übergeleitet. Sie müssen, wenn sie sich während ihres Lösungsweges auf eingefärbte Türme (zum Beispiel die Fünferreihe) oder markante Anzahlen (zum Beispiel die Neun oder die Achtzehn) berufen wollen, überlegen, wie sie von diesen Türmen auf den Ergebnisturm kommen. Dieses erfordert eine Abkehr von der zählenden Strategie hin zu notwendigen Rechenstrategien. Dieser für den zukünftigen Mathematikunterricht wichtige Übergang zum denkenden Rechnen wird nicht nur durch den Faktor der Zeitersparnis herbeigeführt. Das Material trägt zusätzlich zu diesem Entwicklungsschritt bei, indem es durch die Veranschaulichung der Addition mentale Vorstellungsbilder im Kopf der Kinder erzeugt. Sie können sich nach mehrmaligem Arbeiten mit der Pluslandschaft genau im Kopf vorstellen, wie eine Addition verläuft, was das denkende Rechnen positiv beeinflusst.

#### 4. Beurteilung der Pluslandschaft

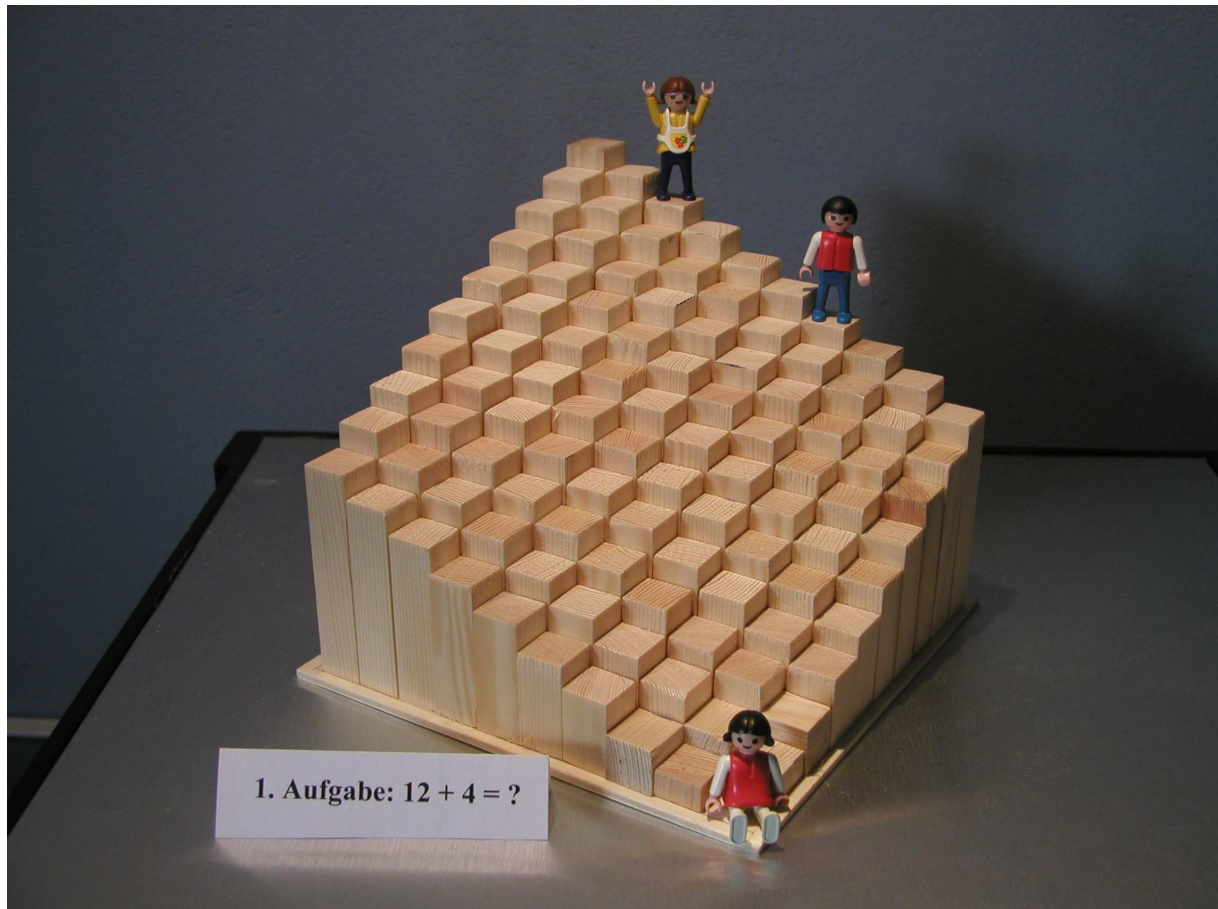
Meiner Meinung nach eignet sich die Pluslandschaft recht gut für die Bearbeitung von Additionsaufgaben im ersten Schuljahr. Äußerlich wirkt sie motivierend auf die Kinder und auch das Arbeiten mit ihr erweist sich als gelungene Abwechslung zu dem im Mathematikunterricht üblichen Kästchenrechnen. Die Kinder werden hierbei nicht nur in ihrer Feinmotorik geschult, sie bekommen auch vielfältige Einsichten in die Grundlagen der Mathematik, welche für ihre weitere Schullaufbahn von enormer Wichtigkeit sind.

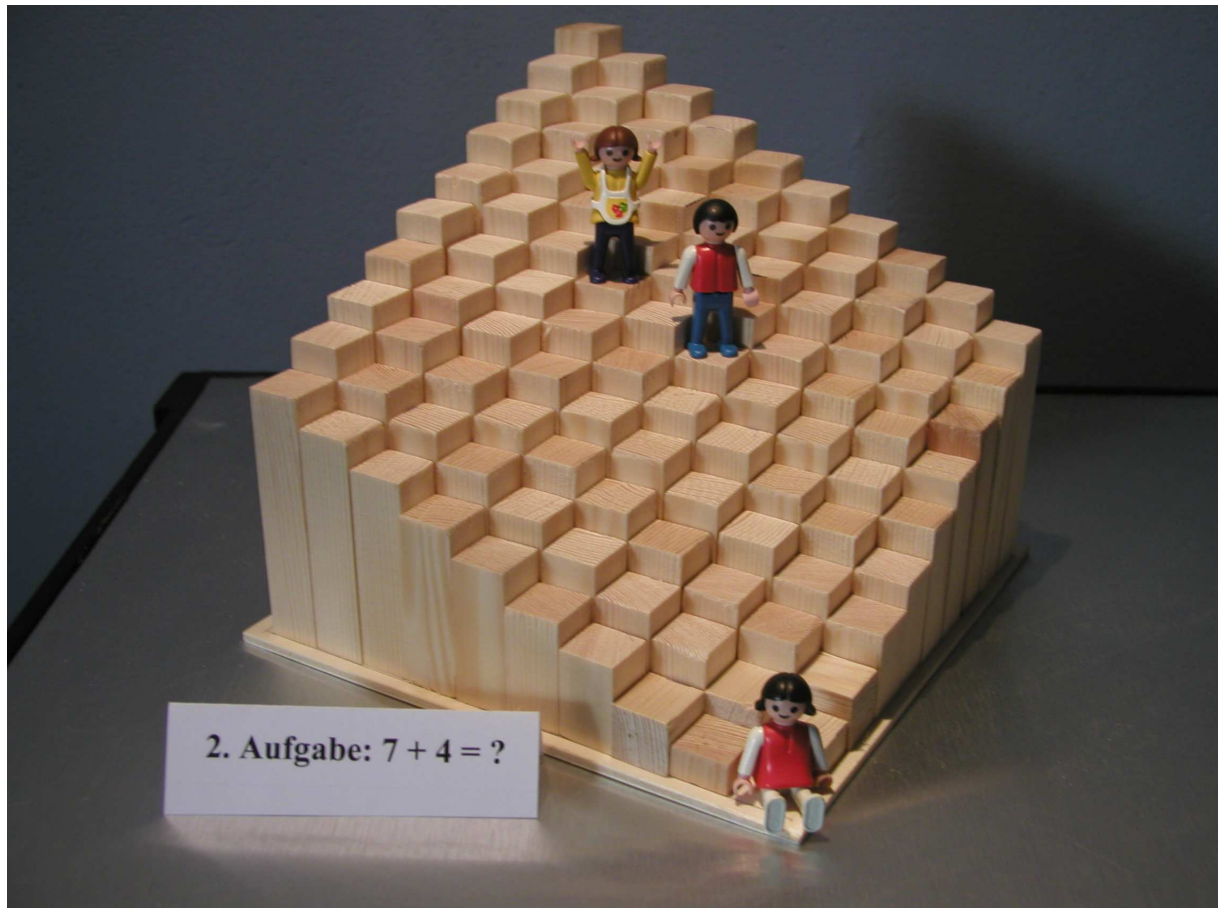
Zum Einen wird ihnen ein Mengenverständnis durch das Arbeiten mit den Holztürmen vermittelt, da hier von der Ziffernschreibweise abgesehen wird und die Mengen nur durch direkte Vergleiche erfassbar sind. Auch wird ihnen die Addition einmal aus einer anderen Perspektive, der funktionalen, nähergebracht. Sie werden aufgefordert den Prozess, welcher durch das Addieren ausgeführt wird, selbst anhand von dem Material in handelnder Weise nachzuvollziehen. Dies bewirkt, dass sie den Vorgang der Addition verstehen lernen, was ihnen bei der Lösung von schwierigeren Aufgaben hilft.

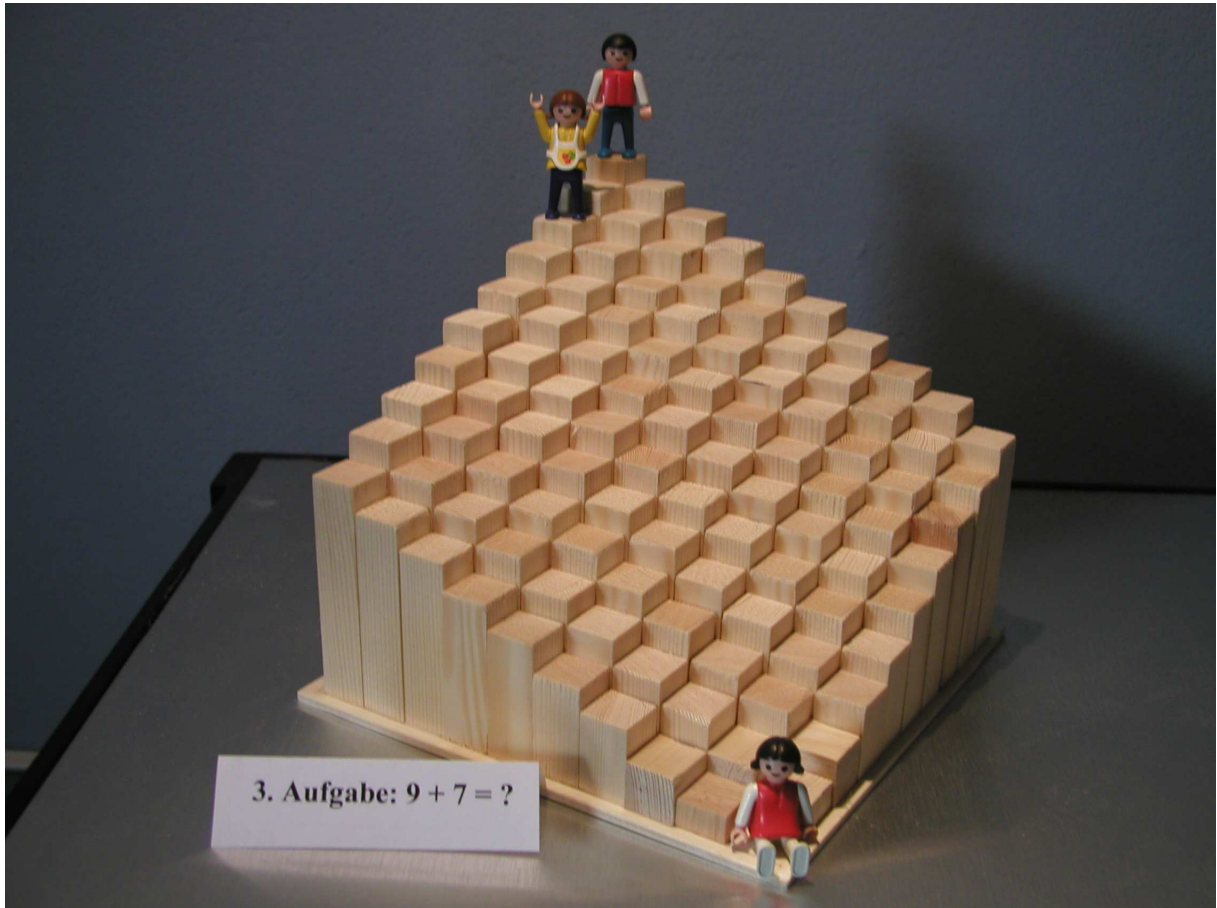
Ebenfalls fördert die Pluslandschaft den Übergang vom zählenden zum denkenden Rechnen. Die Kinder mögen zwar beginnen, mit dem Männchen auf zählende Weise die Treppen aufzusteigen, sie sehen aber bei längerer Arbeit mit dem Material von diesem zeitaufwendigen Weg ab und berufen sich auf Bekanntes. Hierzu ist es als negativ zu bemerken, dass die Pluslandschaft die Zahlen Neun und Achtzehn hervorhebt, andere Anzahlen jedoch ohne den Gebrauch von Plättchen nicht anschaulich gemacht werden. Dieses kann meiner Meinung nach zunächst den Übergang vom zählenden zum denkenden Rechnen erschweren, da die Kinder nicht sofort wissen, welcher Turm die von ihnen gesuchte Anzahl darstellt. Dies kann dazu führen, dass sie wieder in die zählende Weise zurückverfallen. Meiner Meinung nach wäre es hier von Vorteil, wichtige Anzahlen, wie zum Beispiel die Fünferreihe, in jedem Fall kenntlich zu machen, um dem Kind den Zehnerübergang deutlich zu machen, und es ihm zu ermöglichen einzelne Anzahlen schneller zu erfassen. Ist dieses gewährleistet, werden die Kinder auch schneller zum denkenden Rechnen finden, da sie nun, um aus den Vorteilen der eingefärbten Zaubertürme Nutzen zu ziehen, aufgefordert sind, Aufgaben abzuwandeln und von Rechenstrategien Gebrauch zu machen.

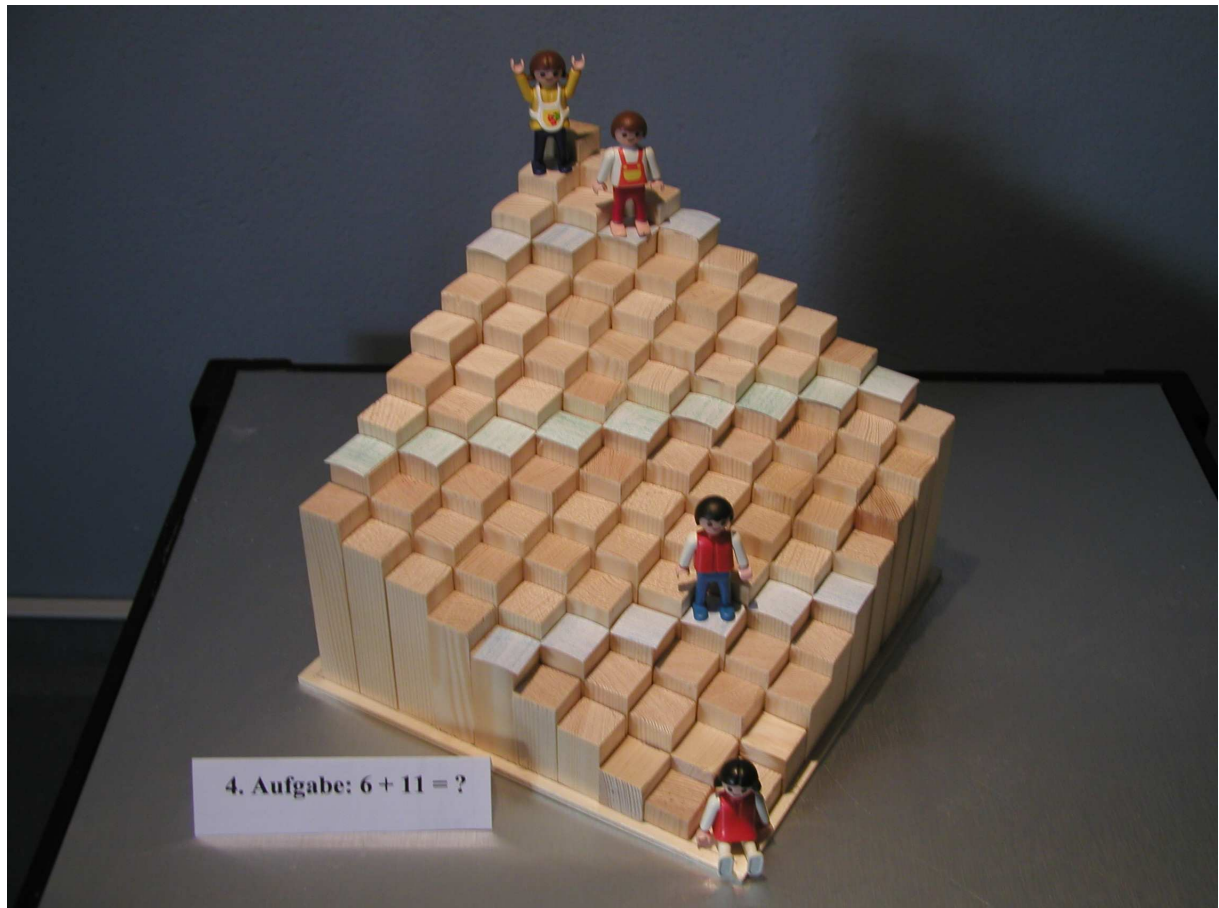
Doch die Pluslandschaft wirkt sich nicht nur positiv auf die Schüler aus. Auch dem Lehrer wird durch die vielfältigen Lösungswege, die mit der Pluslandschaft veranschaulicht werden können, ermöglicht, seinen Unterricht kreativ und vielfältig zu gestalten und die Schüler dazu zu ermuntern, ihre Lösungen untereinander auszutauschen. Außerdem kann er das Material aufgrund der vielfältigen Bearbeitungsmöglichkeiten sowohl bei einem schwächeren als auch bei einem stärkeren Schüler einsetzen. Der Schüler, der noch nicht so vertraut mit der Addition ist und noch kein konkretes Mengenverständnis aufweist kann, zunächst mit der Unterstützung von Zahlenplättchen arbeiten, während der Lehrer bei dem stärkeren Schüler sehr schnell auf dieses Hilfsmittel verzichten kann.

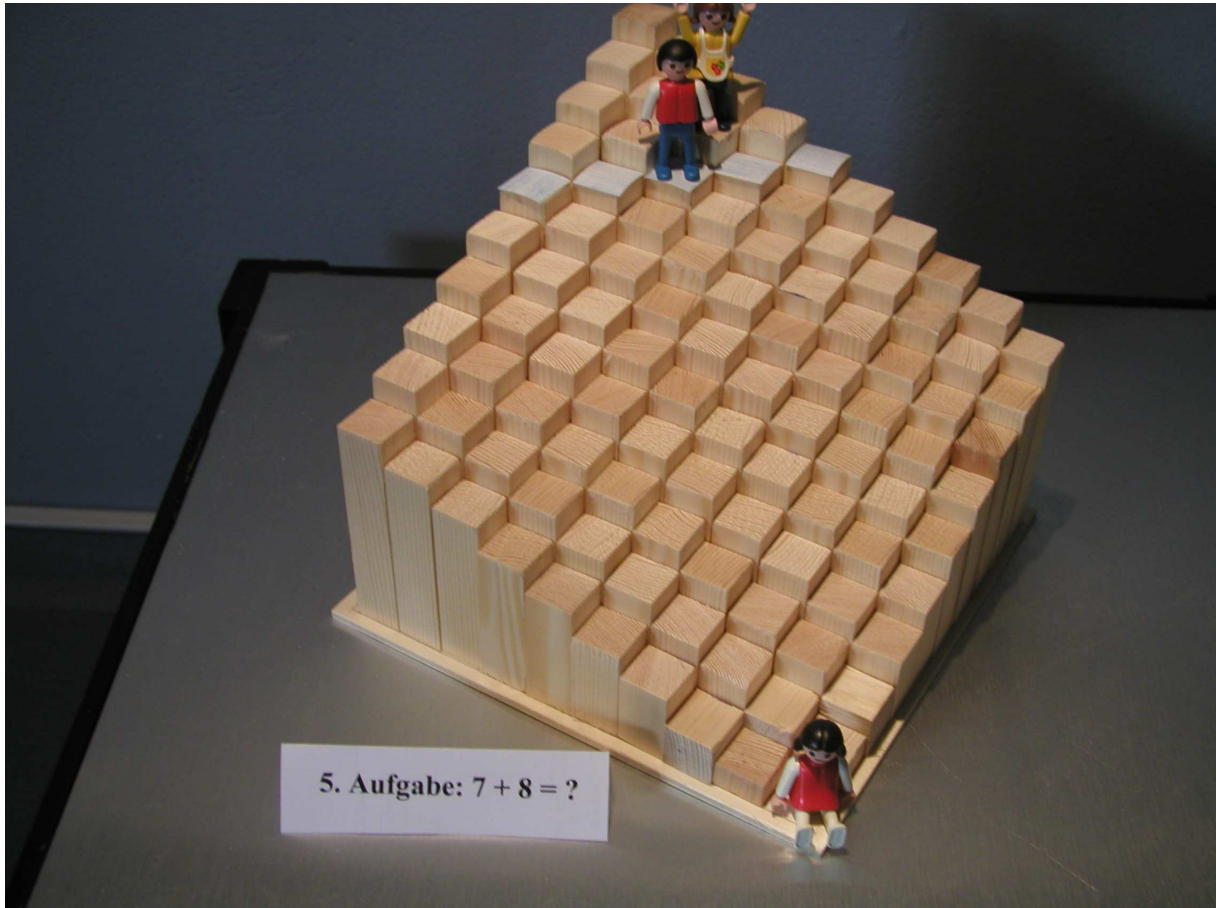
## 5. Anhang











## Literaturverzeichnis

Krauthausen, Günter: Die «Kraft der Fünf» und das denkende Rechnen [In: G. Müller, E. Wittmann (hrsg.): Mit Kindern rechnen; Frankfurt am Main: Arbeitskreis Grundschule, S. 87-108].

Ruf, Urs; Gallin, Peter (1995), Ich mache das so! Wie machst du es? Das machen wir ab. Lehrmittelverlag des Kantons Zürich.