

Universität Osnabrück
Fachbereich Mathematik/Informatik
Seminar: Erstrechnen
Dozentin: Prof. Dr. I. Schwank / R. Brehmer
WS 2003/2004

Thema:

- Die Pluslandschaft -

Nach Peter Gallin

Eingereicht von:
Kathrin Kraicziczek

Matr.:
3. Semester
LA GHR Deutsch/Mathe/ev. Religion

1.	<i>Was ist eine Pluslandschaft?</i>	3
2.	<i>Diskussion der Pluslandschaft</i>	4
	<i>(Besprechung des Materials)</i>	
2.1	<i>Prädikatives und funktionales Denken</i>	4
2.2	<i>Die Kraft der 5</i>	4
2.3	<i>Zählendes und denkendes Rechnen</i>	5
2.4	<i>Zehnerübergang</i>	5
2.5	<i>Anschaulicher Prozess der Ergebnisbestimmung</i>	5
2.6	<i>Relationen und Mengenverständnis</i>	6
3.	<i>Bearbeitung einiger Beispielaufgaben</i>	6
3.1	<i>Addition</i>	6
3.2	<i>Subtraktion</i>	7
3.3	<i>Multiplikation</i>	8
3.4	<i>Relationen</i>	9
4.	<i>Abschließende Beurteilung</i>	9

1. Was ist eine Pluslandschaft?

Die Pluslandschaft wurde von Peter Gallin entwickelt. Sie verdeutlicht anschaulich Rechenoperationen, wobei sie besonders dazu geeignet ist, das Plusrechnen auf funktionale Weise einzuführen. Sie besteht aus 99 Stäben in 18 verschiedenen Längen, die der Größe nach angeordnet sind und auf einer quadratischen Platte stehen. Die verschiedenen Längen der Stäbe beschreiben die Zahlen 0 bis 18. Die Pluslandschaft basiert auf der „1+1 Tabelle“ und stellt diese räumlich dar.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Wie man sieht, nimmt die Anzahl der Stäbe von der 0 bis zur 9 stetig um einen zu – wobei die 0 durch einen freibleibenden Platz gekennzeichnet ist – so dass die 9, die die Diagonale der quadratischen Grundplatte einnimmt, mit 10 Stäben, die meisten zur Verfügung hat. Von der 10 bis zur 18 nimmt die Anzahl der Stäbe wieder kontinuierlich um einen ab, so dass für die Darstellung der Zahl 18 nur noch ein Stab verbleibt.

An der Pluslandschaft können viele mathematische Prozesse, aber auch Denkprozesse verdeutlicht werden, was im Folgenden geschehen soll.

Beim Bau der Pluslandschaft habe ich Wert darauf gelegt, Holz zu wählen, dass nicht splittert. Jeder Stab wurde nach dem Sägen einzeln abgeschmirlgelt und lackiert. Die Pluslandschaft ist ein Modell für Kinder und sollte deshalb nicht verletzungsgefährdend sein. Es ist in meinen Augen wichtig, diesbezüglich zusätzliche Arbeit beim Bau zu leisten.

2. Diskussion der Pluslandschaft

Im Folgenden soll nun die Pluslandschaft mit einigen in der Didaktik-Vorlesung behandelten Themen in Bezug gesetzt werden. Es wird beschrieben in wie weit die Pluslandschaft dem gerecht wird bzw. wo Probleme bei der Umsetzung auftreten könnten. Ich habe dazu die Kriterien:

1. **„Prädikatives und funktionales Denken“**
2. **„Die Kraft der 5“**
3. **„Zählendes und denkendes Rechnen“**
4. **„Zehnerübergang“**
5. **„Anschaulicher Prozess der Ergebnisbestimmung“**
6. **„Relationen und Mengenverständnis“**

ausgewählt.

2.1 Prädikatives und Funktionales Denken

Die Pluslandschaft bietet eine gute Möglichkeit die Addition funktional einzuführen, da man durch dynamische Prozesse zum Ergebnis der Aufgabe gelangt. Die Pluslandschaft weist auch deshalb Funktionalität auf, weil sie in vielen Facetten genutzt und betrachtet werden kann. Entweder bewegt man Rechensteine auf ihr oder man zieht einzelne Stäbe heraus, dreht sie und schließt somit auf Lösungen. Prädikativen Charakter hätte in diesem Falle der Vergleich von mehreren Stäben zum Beispiel nach dem Kriterium Größe, da dieser Vergleich ein statischer Prozess ist, der Form, Länge und Beschaffenheit der Stäbe betrachtet und beurteilt. Generell kann man aber sagen, dass bei der Pluslandschaft eher das funktionale als das prädikative Denken zum Tragen kommt.

2.2 Die Kraft der 5

Die Kraft der 5 spielt bei der Pluslandschaft eine nebengeordnete Rolle. Hier wird jede Zahl von 1-18 in einem Stab gebündelt dargestellt, wobei die 5er Stäbe dabei nicht besonders hervorgehoben werden. Eine besondere Rolle nimmt hier eher die 9 ein, da von ihr die meisten Stäbe vorhanden sind und sie die Diagonale der Pluslandschaft bildet.

Man könnte allerdings die Fünferstäbe markieren, um z.B. das Wandern zur 8, mit einem Fünfersprung und drei Einzelsprüngen zu erleichtern. Später kann dieser Vorgang von den Kindern automatisiert und somit auf die Markierung verzichtet werden. Desweiteren könnte man ein Zusatzmaterial herstellen, beispielsweise einen Papierstreifen, der genau 5 Treppen

lang ist. Diesen könnte man an entsprechender Stelle anlegen und somit Fünfersprünge durchführen. Dann käme auch bei der Pluslandschaft die Kraft der 5 zum Tragen.

2.3 *Zählendes und denkendes Rechnen*

An der Pluslandschaft kann man sowohl das zählende als auch das denkende Rechnen festmachen. Zu Beginn der Arbeit mit der Pluslandschaft wird man, um eine Aufgabe zu lösen, die Felder, die man wandert, abzählen und so letztendlich zum gesuchten Ergebnis kommen. Wenn man trainiert ist und einen größeren Überblick über die Addition hat, kann man Zwischenschritte weglassen und sich frei in der Pluslandschaft bewegen. Es können dann auch einfache Multiplikationsreihen abgesprungen werden. In diesem freien Bewegen ist schon der Übergang zum denkenden Rechnen erkennbar.

2.4 *Zehnerübergang*

Ohne entsprechende Hilfestellung kann die Pluslandschaft die Probleme beim Zehnerübergang nicht erleichtern. Das wäre besser möglich, wenn die Diagonale, die jetzt die Neunerstäbe einnehmen, durch die Zehnerstäbe besetzt wäre. Dann könnten die Kinder erkennen, wann genau sie über den Zehner hinweg sind. In der Konstruktion nach Gallin gäbe es die Möglichkeit, die Zehnerreihe zu markieren, um eine optische Hilfestellung zu geben. Dann wäre für die Kinder leicht zu erkennen, wann der Zehner überschritten wird und sie kämen auf diese Weise z.B. zu der Lösung $8 + 4 = 8 + 2 + 2 = 10 + 2 = 12$.

2.5 *Anschaulicher Prozess zur Ergebnisbestimmung*

Der Prozess der Ergebnisbestimmung ist mit Hilfe der Pluslandschaft sehr anschaulich. Durch das Abgehen der Zahlen mit einem Rechenstein und das „immer höher Klettern“ desselben wird der Vorgang der Addition deutlich herausgestellt. Das Ergebnis, der Stab, auf dem der Spielstein am Ende stehen bleibt, wird anschaulich erarbeitet und ist, ob mit oder ohne Hilfestellung, leicht abzulesen. Zu Beginn wird eine Hilfestellung bestehend aus Zahlenplättchen für die jeweilige Reihe hilfreich sein, später, wenn man geübt ist, kann man diese weglassen. Um das Ergebnis noch auf andere Art anschaulich zu machen, kann man die Stäbe mit dem Wert der Summanden und den mit dem Wert des ermittelten Ergebnisses nebeneinander legen und vergleichen, ob die Länge der beiden Summandenstäbe zusammen gleich der des Ergebnisstabes ist.

2.6 Relationen und Mengenverständnis

Zum Verständnis von Mengen und Relationen ist die Pluslandschaft gut geeignet. Die Relationen größer, kleiner und gleich können sowohl anhand der Höhe des Spielsteines innerhalb der Pluslandschaft, als auch anhand der Länge der Stäbe, wenn man sie aus der Pluslandschaft herauszieht, einleuchtend demonstriert und verstanden werden.

Bei Mengen ist die Verwendungsweise begrenzt. Man müsste sich vorstellen, dass z.B. ein Siebenerstab aus sieben Einzelstäben bestünde und ein Fünfer aus fünf einzelnen, um tatsächlich Mengen vergleichen zu können. Mengen lassen sich vielfältiger und einfacher mit Plättchen, Kugeln oder ähnlichem darstellen. Was natürlich möglich ist, ist die Mengenbestimmung und der Mengenvergleich der Anzahl der zu einer Zahl gehörigen Stäbe, beispielsweise unter der Fragestellung: Gibt es mehr Fünfer- oder mehr Dreizehnerstäbe? Oder sind es gleich viele?

3. Bearbeitung einiger Beispielaufgaben

Im dritten Teil der Bearbeitung werden nun Aufgaben aus 4 verschiedenen Kategorien mit Hilfe der Pluslandschaft (Bild 1) bearbeitet. Die dazugehörige Bebilderung ist auf der beigelegten CD-Rom zu finden.

Die vier ausgewählten Kategorien sind:

1. Addition
2. Subtraktion
3. Multiplikation
4. Relationen

Die Kategorien wurden danach ausgewählt, dass sie möglichst umfassenden Aufschluss über die Verwendbarkeit der Pluslandschaft bieten und dass ihnen eine jeweils unterschiedliche Vorgehens- und Kontrollweise zu Grunde liegt. Es soll der Lösevorgang beschrieben und dabei auftretende Vor- und Nachteile dargelegt werden. Unter 4. schließt dann ein Statement die Arbeit ab.

3.1 Addition

Unter dem Punkt Addition soll es um das Lösen der Aufgabe $8+5$ gehen. Diese Aufgabe habe ich deshalb gewählt, da sie zwei der in der Vorlesung behandelten Themen, nämlich „Die Kraft der 5“ und „Zehnerübergang“, wieder aufgreift und man hier am Beispiel das Lösen der Aufgabe mit Hilfe der Pluslandschaft und möglicherweise auftretende Vor- und Nachteile noch einmal deutlich machen kann.

Vor Beginn der Rechnung wird der Rechenstein auf das 0-Feld gesetzt (grüner Rechenstein, Bild 2). Nun springe ich mit dem Stein den ersten Summanden ab. Dabei kann ich mich entscheiden, ob ich nach rechts oder links springe. Ich entscheide mich für die rechte Seite und springe 8 Treppen nach oben (blauer Rechenstein, Bild 2). Nach einiger Übung hätte ich auch mit einem Satz auf den 8er Stab springen können, da die 8 leicht zu lokalisieren ist, wenn man sich an der 9er-Diagonale orientiert. Nun muss ich 5 addieren, d.h. ich springe von dort aus 5 Felder nach oben. In diesem Fall kann ich nur nach links springen, da das Modell nur diesen Weg zulässt. In einem erweiterten Modell hätte ich beispielsweise auch die gleiche Treppe weiter hinauf springen können. Nach dem Abspringen der 5 Felder bin ich nun auf meinem Lösungsstab, dem 13er, angekommen (roter Rechenstein, Bild 2). Die Kraft der 5 konnte ich beim abspringen des 2. Summanden nicht ausnutzen, da in der Pluslandschaft keine 5er Bündelung markiert ist. Man könnte sich aber zum Beispiel einen Papierstreifen schneiden, der genau über 5 Treppen reicht und ihn an der 8 anlegen (Bild 3). Dann wüsste man, dass man mit Hilfe des Streifens einen 5er Sprung macht und hätte so die Kraft der 5 ausgenutzt.

Der Zehnerübergang ist beim normalen „Abhüpfen“ der Treppen in dieser Aufgabe nicht ins Gewicht gefallen. Wahrscheinlich hätte ein Kind beim Lösen dieser Aufgabe nicht einmal bemerkt, dass es den Zehner überschritten hat. Durch das Abhüpfen, was dem zählenden Rechnen gleicht, taucht diese Problematik nicht auf. Um den Zehner heraus zu heben, könnte man die Zehnerreihe mit bunten Papierplättchen bedecken (Bild 3). Das würde zum einen wiederum eine Orientierung bieten und zum anderen einen Schritt zum denkenden Rechnen (weitere Sprünge auf der Landschaft) weg vom bloßen Abzählen bewirken.

Zur Kontrolle des Ergebnisses kann ich nun den 13er Stab herausziehen und ihn mit dem 5er und dem 8er Stab auf seine Länge vergleichen. Ist er genauso lang, wie der 5er und der 8er zusammen, ist die Lösung richtig (Bild 4). Das Kind hat also die Möglichkeit sich selbst zu kontrollieren.

3.2 Subtraktion

Als Beispiel für die Subtraktion wird die Aufgabe $17 - 9$ bearbeitet. Beim Lösen dieser Aufgabe haben die Kinder per Kopfrechen die Schwierigkeit des Zehnerübergangs.

Beim Lösen der Aufgabe mit der Pluslandschaft steht der Rechenstein zu Beginn erneut auf dem 0-Feld. Dann muss er auf die Position des Minuenden gebracht werden, was bedeutet, dass man 17 Stufen aufwärts springen muss. Wieder hat man die Wahl am rechten oder am linken Rand der Pluslandschaft 17 Stufen abzuspringen. Diesmal wähle ich den linken. Ich

springe also 9 Stufen nach links, bis der Stein auf der Diagonalen steht und folge dann weiter der äußeren Stabreihe bis ich beim 17er Stab angekommen bin. Wieder wäre es einem geübten Kind möglich, mit einem Satz auf die 17 zu springen, da es mit der Zeit lernt, dass der längste Stab der 18er Stab ist und man sich daher, wenn man zur 17 möchte, eine Reihe unter den 18er stellen muss.

Als nächstes werden 9 subtrahiert. Also springe ich mit dem Rechenstein 9 Treppen herunter. Entweder auf dem gleichen Weg, den ich hochgesprungen bin oder nach rechts herunter. Das dann von dem Rechenstein besetzte Feld ist das gesuchte Lösungsfeld (Bild 5). Wieder erkenne ich, dass ich mich eine Reihe unter Diagonalen, also auf dem 8er Stab, befinde. Auch hier ist eine Selbstkontrolle des Ergebnisses möglich. Man zieht den 17er Stab heraus und legt den 9er Stab darauf. Alles was nun von dem 9er Stab bedeckt ist, ist abgezogen worden. Das Stück, was unten noch herauschaut ist die gesuchte Lösung. Man nimmt nun also den 8er Stab und vergleicht seine Länge mit der nicht abgedeckten vom 17er Stab. Sind die Längen gleich, ist das Ergebnis richtig (Bild 6, Seitenansicht). Der Zehnerübergang stellt genau wie bei der Addition kein Problem dar, wird allerdings auch nicht explizit zur Kenntnis genommen.

3.3 Multiplikation

Zur Bearbeitung der Multiplikation soll hier die 2er Reihe betrachtet werden. Zuerst einmal kann man das Einmalzwei mit dem Rechenstein abspringen, in dem man immer zwei Treppen gleichzeitig herauf springt. Das kann man entweder am Rand der Pluslandschaft, rechts oder links, oder auch im Zickzackmuster. Wenn nun die Aufgabe 6×2 gelöst werden soll, muss man sechs Zweisprünge machen, um zu dem Ergebnisfeld zu gelangen. Angekommen sehe ich, dass dies der 12er Stab ist (Bild 7). Die Markierung auf der 10er Reihe hilft dabei, die 12er Reihe zu erkennen ($10+2$). Durch den Zweiersprung, den ich in diesem Fall sechs mal mache, um die Aufgabe 6×2 zu lösen, wird die Verwandtschaft zwischen Addition und Multiplikation sehr anschaulich gemacht, dass nämlich 6×2 nicht anderes bedeutet als $2+2+2+2+2+2$. Auch hier kann sich das Kind selbst überprüfen. Es zieht den 12er Stab heraus und vergleicht, ob dieser genauso lang ist wie sechs 2er Stäbe. Das Problem dabei ist, dass in der Pluslandschaft nur drei 2er Stäbe enthalten sind. So müsste man also zur Kontrolle entweder Ersatzstäbe bereithalten oder die Kinder eine eigene Kontrollmöglichkeit entwickeln lassen. Man könnte z.B. darauf kommen, dass zwei 2er Stäbe in einen 4er passen, vier 2er somit also zwei 4er füllen und sechs 2er folglich drei 4er Stäben entsprechen. Da die

Pluslandschaft fünf 4er Stäbe enthält, wäre eine Kontrolle des 12er Stabes mit drei 4er Stäben möglich (Bild 8).

3.4 Relationen

Auch Relationen können mit der Pluslandschaft bearbeitet werden. Als Beispiel soll hier die Ungleichung $15 > 12$ dienen. Ob diese Aussage wahr oder falsch ist, lässt sich anhand der Pluslandschaft leicht ermitteln. Man stellt zuerst einen Rechenstein auf die Ebene 15, anschließend einen anderen auf Ebene 12. Man sieht nun deutlich, dass der Rechenstein auf der 15er Ebene höher steht, also größer ist, als der auf der 12er Ebene (Bild 9). Die Ungleichung $15 > 12$ ist also eine wahre Aussage.

Man kann derartige Aufgaben auch noch auf eine andere Art lösen. Beispiel hierfür ist die Aufgabe $7 \hat{=} 3$. Um nun herauszufinden, ob 7 größer, kleiner oder gleich 3 ist, zieht man die entsprechenden Stäbe aus der Pluslandschaft heraus und legt sie nebeneinander. Wenn man im Umgang mit den Relationszeichen schon geübt ist, kann man leicht das geeignete Zeichen finden, braucht man noch Hilfe, kann man ausprobieren, welches Zeichen man um die beiden Stäbe herum zeichnen könnte (Bild 10). In beiden Fällen kommt man sicher zu dem Ergebnis $7 > 3$.

5. Abschließende Beurteilung

Abschließend komme ich zu dem Ergebnis, dass die Pluslandschaft eine gute Möglichkeit bietet, um Kindern, besonders im 1. und 2. Schuljahr, mathematische Prozesse zu verdeutlichen. Die Kinder lernen dadurch, dass sie selbst experimentieren und sich selbst korrigieren. Das spiegelt das Konzept des ganzheitlichen Lernens nach Maria Montessori wider. Es ist erwiesen das Kinder durch ganzheitliches Lernen, das heißt Lernen mit allen Sinnen, besonders gut neue Sachverhalte begreifen, neues Wissen aneignen und neue Methoden entwickeln können. Zudem stellt das eigene Experimentieren eine große Motivation dar.

Ihre Handhabung ist leicht verständlich, bietet aber dennoch auch Herausforderungen. Man kann die Fortschritte der Kinder gut überprüfen, in dem man darauf achtet, wie sie die Rechensteine innerhalb der Pluslandschaft bewegen. Zählen sie die Stufen einzeln ab, oder sind sie schon routinierter und springen in größeren Schritten.

Besonders gut gefällt mir, dass die Kinder bei beinahe jeder Aufgabe die Möglichkeit haben, sich selbst und das von ihnen ermittelte Ergebnis zu überprüfen und zu korrigieren. Sie sind nicht auf eine Korrektur des Lehrers angewiesen.

Ein Kritikpunkt wäre, dass mir nicht klar ist, warum die Pluslandschaft bis zur 18 geht. Würde man sie bis zur 20 erweitern, hätte das viele Vorteile. Zum einen rechnen Kinder im 1. Schuljahr im Zahlenraum bis 20. Es wird sicherlich Fragen aufwerfen, warum sie mit der Pluslandschaft nicht auch bis 20 rechnen können. Gerade die hohen Zahlen in dem von Kindern beherrschten Zahlenraum sind für diese interessant. Man kann nicht voraussetzen, dass Kinder der 1. Klasse in der Lage sind, die Pluslandschaft im Kopf zu erweitern.

Ein weiterer Vorteil einer Pluslandschaft bis 20 wäre in meinen Augen, dass sie das Zehnersystem besser widerspiegeln würde. Außerdem würden dann die Zehnerstäbe die Diagonale der Pluslandschaft bilden, was zusätzlich die Schwierigkeit des Zehnerübergangs hervorheben würde. In dem Modell nach Gallin wird der Zehnerübergang meiner Ansicht nach etwas vernachlässigt.

Alles in allem ist die Pluslandschaft aber ein reizvolles, vielseitig einsetzbares und leicht verständliches Material, dessen Verwendung Kinder im Alter von 6-8 mit Sicherheit mathematisch weiter bringen kann!