

Fachbereich Mathematik

Erstrecken-Auftrag

Prof. Dr. Schwank

09.01.2004

Die Pluslandschaft

von Peter Gallin und Urs Ruf

Stellen Sie eine einsatzfähige Pluslandschaft her (Schülermodell). Bearbeiten Sie damit viele verschiedenartige Aufgaben (mind. 4), die sie nach Kategorien geordnet auflisten. Besprechen Sie das Material vor dem Hintergrund dessen, was sie in der Vorlesung vorgestellt bekommen haben.

Katja Boeck

Grundschullehramt 3. Semester

Mathematik, Englisch, Textiles Gestalten

Einleitung

In dieser Arbeit beschäftige ich mich mit der Pluslandschaft von Ruf und Gallin auf dem Hintergrund der Vorlesung „Didaktik der Mathematik 1“.

Ich habe mich bei meinem Nachbau der Pluslandschaft ziemlich an die Vorgaben von Ruf und Gallin gehalten.

Die Holzstäbe haben einen Durchmesser von 1,3cm mal 1,3cm. Der Abstand der einzelnen Stufen beträgt 1,5cm. Als Schülermodell ist die Größe meiner Meinung nach ausreichend, denn es sollte ja transportabel sein, damit die Schüler es auch zuhause benutzen können.

Die 99 Stäbe stehen auf einer Holzplatte und werden von einem Holzrahmen gehalten.

Für die anfängliche Orientierung habe ich aus Tonpapier kleine Plättchen, die mit Zahlen versehen sind, geschnitten. Diese kann man mit doppelseitigen Klebeband auf den Stäben befestigen.

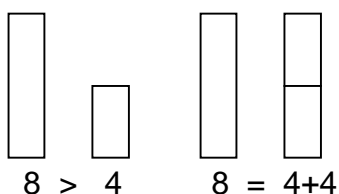
Als Figuren habe ich kleine Holzfiguren gewählt. Sie sind absichtlich so schlicht, da auch die Landschaft sehr schlicht gestaltet ist. Die Figuren sind leider etwas klein, aber der Größe der Landschaft entsprechend.

Vor der Arbeit mit der Pluslandschaft steht der Zusammenbau der Landschaft. Dieser Schritt ist für die Kinder ebenfalls sehr wichtig, denn dabei wird deren Feinmotorik gefordert und gefördert. Viele Kinder haben dabei heutzutage große Defizite. Damit ist die Pluslandschaft unter dem nichtmathematischen Aspekt ebenfalls ein sehr sinnvolles Material.

Im Folgenden werde ich nun vier verschiedene Aufgabenkategorien vorstellen und diese unter den Aspekten der Vorlesung analysieren und beurteilen.

Als erste Kategorie habe ich mich für den Größenvergleich und die Zerlegung von Zahlen mit Hilfe der Pluslandschaft entschieden. Diese Kategorie steht deshalb am Anfang, weil sie vor der Addition als Einstieg zum Umgang mit Zahlen sehr wichtig ist um das Zahlenverständnis der Kinder zu schulen.

Aufgabenbeispiel: Vergleich von 8 und 4, Zerlegung der 8



Beim Vergleich kann man die Stäbe aus der Landschaft herausnehmen, sie nebeneinander legen und die Größe vergleichen.

Für die Zerlegung kann der Schüler neben den Achterstab die passenden Stäbe legen, damit die Längen übereinstimmen.

Diese Aufgabe könnte am Beginn der Arbeit mit der Pluslandschaft stehen. Dadurch können die Schüler sich mit diesem Material vertraut machen. Sie lernen, dass die Stäbe mit den verschiedenen Längen für Zahlen stehen und lernen dabei auch den Aufbau der Landschaft kennen. Durch diese Aufgabe wird das Mengenverständnis und der Umgang mit Größen

geschult. Allerdings muss ich in diesem Kontext auch etwas Kritik üben. Das Problem der Mengenerfassung ist ziemlich offensichtlich, denn die 8 lässt sich nicht an 8 Dingen abzählen. Der Achterstab besteht ja genauso wie die anderen Stäbe aus immer nur einem Stab.

Bei dieser Aufgabe sind alle drei Repräsentationsarten vertreten. Beim Vergleich/ Zerlegung können die Schüler handelnd zur Lösung kommen. Die visuelle Ebene ist zur Abschätzung der Größen nötig. Die formal-symbolische ist dadurch gegeben, dass jeder Stab eine Zahl repräsentiert.

Bei der Zerlegung der 8 nutzen die Schüler den prädikativen Lösungsweg. Sie setzen die einzelnen Stäbe in Beziehung zueinander. Die gemeinsame Eigenschaft ist die gleiche Länge der 8 und der zwei Vieren. Diese Lösung wird jedoch durch die Handlung des Zusammensetzens der Stäbe vollzogen.

Mit der Pluslandschaft lernen die Kinder auf eine anschauliche aber dennoch recht abstrakte Art den Umgang mit Zahlen. Durch die Abstraktheit findet die Ablösung vom zählenden zum denkenden Rechnen leichter statt, denn die Schüler halten nicht zu sehr an konkreten Bildern fest.

Die Zerlegung ist eine notwendige Übung besonders für den Übergang zur Addition mit dem Zehnerübergang. Diese Art und Weise des Umgangs mit den Stäben kommt dem mit den Cuisenaire-Stäbchen nahe. Da ist die Wertigkeit der Stäbe jedoch durch die Farbe gekennzeichnet.

Bevor ich nun zu den Aufgabe, bei denen konkrete Rechenoperationen im Vordergrund stehen, komme, möchte ich kurz ein paar zusammenfassende Worte dazu sagen.

Bei den Rechenoperationen wird die funktionale Herangehensweise gefordert, d.h. das Denken in Handlungsfolgen. Deshalb sind auch weder Farben noch Beschriftungen bei der Pluslandschaft vorgesehen, denn diese würden das Augenmerk auf ein statisches Dasein lenken. Im Vordergrund soll die Dynamik der Operation stehen, d.h. es findet eine Bewegung statt, die den Prozess zur Ergebnisbestimmung verdeutlicht. Konkret sieht es dann so aus, dass die Kinder mit den Figuren in der Landschaft herumwandern.

Diese Art und Weise sehe ich für die Kinder als sehr positiv, denn von dem was wir tun, behalten wir am meisten.

Kinder sollen Mathematik erfahren, denn dadurch wird ihr Lernerfolg positiv beeinflusst.

Als zweite Kategorie habe ich mich für den Zehnerübergang bei der Addition entschieden, da dies bei den meisten Schülern oft ein schwieriges Problem darstellt. Ich möchte deshalb untersuchen, in wieweit sich hier die Pluslandschaft eignet.

Aufgabenbeispiel: $5+7=12$ Man beginnt auf der Null, geht mit der Figur z.B. 5 Treppen in Längsrichtung und dann 7 Treppen in Querrichtung. Man landet so auf dem Zwölferturm.

Eine andere Möglichkeit, und davon gibt es immer mehrere, wäre, dass man den linken Nachbarn $6+6=12$ kennt.

Der Zehnerübergang wird so gar nicht beachtet, denn er bildet ja keine erkennbare Hürde, es wird einfach über ihn hinweggegangen. Um ihn zu verdeutlichen, könnte man die Zehnerreihe extra kenntlich machen. Legt man z.B. rote Plättchen auf alle Zehner, sehen die Kinder, wenn sie den Zehner überschreiten. Dabei würde die 7 dann in 5 und 2 zerlegt werden. Der Schüler erfährt dadurch, wann er den Zehner erreicht hat und wie viel er noch über den Zehner hinaus muss.

Meiner Meinung nach spielt die Kraft der Zehn eine wichtige Rolle, denn wir befinden uns ja im Dezimalsystem. Deshalb sollten Kinder auch mit dem Zehnerübergang vertraut gemacht werden. Bei der Zahlenraumerweiterung entstehen sonst Probleme.

Bei der Pluslandschaft wird weder dem Zehner noch dem Fünfer besondere Aufmerksamkeit zugeteilt. Dadurch ergibt sich aus meiner Sicht ein Nachteil des Materials. Man kann dem aber wie oben beschrieben entgegengehen, jedoch denke ich, dass dies nicht von Ruf und Gallin gewünscht ist, da sie Beschriftungen ablehnen.

In der dritten Kategorie beschäftige ich mich mit Subtraktionsaufgaben. Dies finde ich interessant, da es sich eigentlich um eine Pluslandschaft handelt. Da die Subtraktion jedoch die Umkehroperation zur Addition ist, kann diese auch mit dem vorliegenden Material ausgeführt werden. Konkret habe ich eine Aufgabe gewählt mit zwei Minuenden, damit zeige ich, dass bei der Aufgabenart sehr viel Variationsmöglichkeiten vorhanden sind.

Aufgabenbeispiel: $18 - 5 - 6 = 7$ Der Schüler stellt seine Figur auf den höchsten Turm, die 18, und wandert nun 5 Türme nach z.B. links unten und dann 6 nach rechts unten. Er landet so auf dem Siebenturm.

Bei dem Prozess der Ergebnisbestimmung wird sehr gut deutlich, dass im Gegensatz zur Addition, die Zahl immer kleiner wird, da man die Figur abwärts bewegt und die Türme an Höhe verlieren. Bei der Addition steigt man mit der Figur immer höher und erkennt dadurch sehr gut, dass die Zahl immer größer wird. Die Schüler erkennen durch den Aufbau der Landschaft sehr schnell und anschaulich den Sinn der Addition sowie der Subtraktion. Es wird sich auf diese Art sehr schnell in den Köpfen der Kinder verankern und Fehler werden dadurch verringert.

Dadurch, dass sowohl Addition als auch Subtraktion mit der Landschaft durchgeführt werden können, erkennen die Kinder schnell und sicher den Zusammenhang zwischen den beiden Rechenoperationen. Sie können ihre Aufgaben immer selbst durch die Gegenaufgabe in der anderen Operation kontrollieren. An meinem Beispiel wäre es konkret die Aufgabe $7 + 6 + 5 = 18$. Man geht den Weg mit der Figur rückwärts.

Diese Kontrollmöglichkeit ist sowohl für die Subtraktion als auch für die Addition möglich.

Für die Kinder ist die Selbstkontrolle ein sehr wichtiger Bestandteil im Unterricht allgemein. Sie erkennen ihre Fehler selber und können sie auch selber berichtigen. Dadurch lernen sie viel mehr aus den Fehlern, als wenn sie von den Lehrern gezeigt werden.

Bei meiner Umkehrplusaufgabe hat sich leider eine kleine Schwierigkeit eingeschlichen, die man zu Beginn der Arbeit mit der Pluslandschaft eigentlich vermeiden sollte.

Wenn man 7+6 gewandert ist, landet man auf dem Turm der 13. Von da aus hat man nun keine Möglichkeit mehr die fünf in eine Richtung zu wandern. Man kann entweder 2 nach links oben und dann drei nach rechts oben oder umgekehrt wandern. Die 5 wird so in zwei Richtungen aufgeteilt. Dies könnte bei den Kindern anfangs Verwirrung auslösen, weil sie gelernt haben eine Zahl immer in eine Richtung zu gehen. Wenn sie mit der Landschaft aber vertaut sind, finden sie heraus und das ist ja auch Sinn der Landschaft, dass die Richtungen keine Rolle spielen und immer viele Wege zum Ziel führen.

Am Anfang sollte man also wirklich nur bei den Aufgaben von 0+0 bis zu 9+9 bleiben. Da treten die Richtungsschwierigkeiten nämlich noch nicht auf. Außerdem ist die Pluslandschaft im Ursprung auch dafür konzipiert.

Bei Additions- und Subtraktionsaufgaben hat man sehr gute Möglichkeiten Aufgaben mit Platzhaltern zu bearbeiten. Verwandelt man meine Beispielaufgabe der Addition, könnte sie so aussehen: $7 + \underline{\quad} = 13$

Man kann in der Landschaft nun gut mit 2 Figuren arbeiten, eine steht auf der 7 und eine auf der 13. Man muss nun mit der Figur auf der 7 zur 13 wandern. Die Treppen werden dabei gezählt. Durch die Markierung der 13 ist diese Aufgabe sehr anschaulich und einfach zu lösen.

Man sieht, dass man viele Möglichkeiten hat mit der Pluslandschaft die Addition und Subtraktion zu erarbeiten.

Eine weitere Möglichkeit stelle ich nun in meiner vierten Kategorie vor. Dabei geht es um den Übergang von der Addition zur Multiplikation. Die Vorstufe der Reihenbildung kann an der Pluslandschaft gut erarbeitet werden.

Beispielaufgabe: Zweierreihe

Die Zweierreihe in der Landschaft beginnt man bei der Null. Von dort wandert man immer senkrecht hoch bis zur 18. Bei dieser Treppe handelt es sich um die steilste Treppe in der Landschaft.

Anhand dieser Treppe können die Kinder gut die geraden Zahlen lernen. Beginnt man bei der Null ist jede zweite Zahl eine gerade Zahl. Die erste ungerade Zahl liegt also zwischen Null und Zwei, die Eins. Um nun die Reihe der ungeraden Zahlen zu wandern, beginnt man bei der Eins und wandert von dort aus die Zweierreihe nach oben.

Die Reihenbildung lässt sich ausweiten auf Dreier, Vierer usw. Dabei wandert man jedoch nicht mehr in einem Schritt wie bei der Zweierreihe, sondern z.B. bei der Dreierreihe jeweils drei Schritte in eine Richtung.

Man kann die Reihen jedoch erst mal nur soweit gehen, wie die Türme reichen.

Über diese Reihen kann man nun den Bezug zwischen Addition und Multiplikation herstellen.

Multiplikation ist ja nur die Zusammenfassung der Addition mit mehreren Summanden.

Wenn ich auf der Zweierreihe 4 mal springe bin ich auf der Acht. Die Additionsaufgabe dazu wäre $2+2+2+2=8$, die Multiplikationsaufgabe $4 * 2 =8$

Dieser Bezug zwischen den Aufgaben kann durch die Anzahl der Sprünge sehr gut veranschaulicht werden und die Kinder lernen es schnell.

Verschriftlichung

Ich sehe es als nicht sehr sinnvoll an für die Landschaft eine besondere Art der Verschriftlichung zu wählen. Um die Struktur der Landschaft wiederzugeben, bedarf es einer sehr aufwendigen Verschriftlichung und das sollte man den Kindern nicht zumuten. Meiner Meinung nach kann man bei der regulären Schriftweise bleiben, ohne dass dabei Verwirrungen bei den Kindern auftreten.

Fazit

Nach der Bearbeitung der konkreten Aufgaben möchte ich nun auf zwei Schwerpunkte etwas genauer eingehen, die Theorie des radikalen Konstruktivismus und die Theorie vom zählenden und denkenden Rechnen.

Meiner Meinung nach findet die Pluslandschaft ihre Begründung im radikalen Konstruktivismus. Dessen Forderung war, dass der Lernende mehr ins Zentrum rücken muss. Da jeder Schüler individuell lernt, bietet die Pluslandschaft sehr viel Vorteile. Um zu einer Lösung zu gelangen, hat der Schüler immer mehrere Möglichkeiten. Er kann sich die aussuchen, die ihm selbst am meisten Lernerfolg bringt. So bildet er eine Strategie, die für ihn viabel ist.

Außerdem ist es wichtig, dass der Unterricht nicht nur auf „Erklärungen“ des Lehrers basiert, sondern, dass dieser mit den Schülern aktiv etwas erarbeitet. Mit der Pluslandschaft hat der Lehrer die Möglichkeit einen Lösungsweg zu demonstrieren und die Schüler können diesen aktiv nachvollziehen. Der Schüler sollte die Hauptperson bei Lernprozessen sein und deshalb muss der Lehrer auf die Bedürfnisse dieser achten. Es ist in der Hirnforschung erwiesen, dass wir etwa 90% von dem behalten, was wir aktiv durchführen. Gute Theorien kann man nicht auswendig lernen, sondern nur durch deren Anwendung lernen.

Das aktive Handeln steht bei der Pluslandschaft deutlich im Vordergrund, denn die Schüler sollen mit Figuren in der Landschaft herumwandern. Es werden funktionale Lösungsstrategien gefordert.

Die Vorteile zusammenfassend, kann man sagen, dass der Lernende aktiv mit vielen Möglichkeiten im Mittelpunkt steht.

Abschließend komme ich nun auf die Theorie des zählenden und denkenden Rechnens zu sprechen.

In der Pluslandschaft wird sehr deutlich das zählende Rechnen benutzt. Bei der Addition werden die einzelnen Summanden abgezählt und das Ergebnis wird dann anhand des Turmes, auf dem die Figur steht erschlossen. Der Vorteil, der dadurch entsteht, ist der der frühen Einsetzbarkeit. Da Kinder schon vor der Schule zählen können, kann man problemlos schon von Beginn an mit der Pluslandschaft arbeiten. Alle Kinder haben dieselbe Grundlage, bis auf das manche weiter zählen können. Sie können mit der Pluslandschaft problemlos erste arithmetische Aufgaben lösen.

Die Problematik ist jedoch, dass die Abzählstrategie sich nicht zu sehr verfestigen darf, denn es sollte eine Ablösung zum denkenden Rechnen stattfinden. Man merkt ja an der Landschaft schnell, dass sie nicht über die Zahl 18 hinausgeht, man stößt somit schnell an eine Grenze. Laut Gallin gibt es zwar die Möglichkeit sich die Landschaft in anderen Zahlenebenen vorzustellen. Die 1 wäre dann z.B. die 51 usw. Ich sehe das jedoch nicht als unbedingt erstrebenswert an, denn dann halten die Kinder sich zu sehr an dem zählenden Rechnen fest.

Für die Ablösung ist das Material mitverantwortlich. Es sollte durch vielfältiges Tun die Möglichkeit geben tragfähige Vorstellungsbilder zu schaffen. Diese nennt man mentale Bilder. Kinder sollten das Material so lange benutzen bis sich diese Bilder verfestigt haben.

Wichtig für das Material ist, dass es einerseits konkret, andererseits aber auch abstrakt ist. Außerdem ist eine strukturierte Darstellung von großem Vorteil, da die visuelle Wahrnehmung für die Bildung mentalen Bilder ebenfalls notwendig ist.

Die Anforderungen, die an das Material gestellt werden, kann die Pluslandschaft durchaus erfüllen. Sie ist so konkret, dass man die einzelnen Stäbe herausnehmen oder auf ihnen herumwandern kann. Sie ist aber auch so abstrakt, als dass jeder Turm für eine Zahl steht. Aus dem Grund sind wohl auch keine Zahlen auf den Türmen, denn dann wären sie ja nicht mehr so abstrakt. Hier spielt auch die Übertragung der Türme in andere Zahlenebenen eine Rolle. Die Türme können unterschiedliche Werte annehmen. Außerdem ist die Pluslandschaft sehr strukturiert aufgebaut. Man findet sich leicht darin zurecht.

Dadurch dass jeder Schüler seine individuelle Lösungsstrategie mit Hilfe der Pluslandschaft entwickeln kann, kann er auch individuelle mentale Bilder konstruieren.

Die Pluslandschaft ist also trotz der überwiegenden Abzählstrategie ein geeignetes Material, denn mit ihr kann der Weg vom zählenden Rechnen zum denkenden Rechnen gegangen werden.

Unter den von mir untersuchten Gesichtspunkten beurteile ich die Pluslandschaft als früheinführbares Material in der Grundschule als sehr positiv.

Meiner Meinung nach bleiben nur wenige nicht schwerwiegende Nachteile. Diese wären zum Einen die Transportfähigkeit der Landschaft, denn die Schüler sollen ja auch zuhause damit rechnen. Sie benötigen eine passende Box, damit sie die Landschaft nicht immer wieder neu aufbauen müssen.

Ein weiter Nachteil, den ich aber oben schon mal beschrieben habe, ist die Problematik mit den Richtungen. Ohne zusätzlichen Richtungswechsel ist die Landschaft nur bis $9+9$ zu benutzen. Ich denke aber, dass die Schüler nach häufiger Anwendung dieser Aufgaben bereits soweit damit vertraut sind, dass sie auch über „Umwege“ zu den Lösungen kommen.

Der Nachteil der Mengenerfassung sowie der Beachtung der Kraft der Zehn sind am schwerwiegensten, aber man sollte in der Grundschule ja nie nur mit einem Material arbeiten. Um diese beiden Bereiche zu verdeutlichen sollte man anderes Material mit zur Hilfe nehmen.