

1. Einleitung: Meine Pluslandschaft [PL] (siehe auch Foto 1)

Die Ihnen vorliegende, (von mir) selbsthergestellte 3D Pluslandschaft besteht aus naturfarbenen Holzquadern, ähnlich wie die PL der Herren Ruf & Gallin (1995). Da ihre PL, welche wir in der letzten Übung gezeigt bekommen haben sehr groß ist und sich somit Probleme beim Erreichen der jeweiligen höheren Plattformen ergeben können (sofern man die PL auf einen Tisch stellt), habe ich ein kleineres Modell angefertigt. Es nimmt somit auch weniger Platz in Anspruch und ist außerdem aufgrund der Verwendung von so genanntem Leichtholz leichter zu transportieren. Insgesamt ist es aber für Grundschüler dennoch zu schwer zum Tragen. Daher ist es auch ungeeignet, es täglich mit sich zu führen. Außerdem denke ich auch, dass der Kostenfaktor eine große Rolle bei der Anschaffung einer solchen Pluslandschaft spielt. Ich habe allein nur für das Holz über 40,- Euro bezahlt und denke, dass es für viele Familien zu teuer ist (im Vergleich zu einer gebräuchlichen Rechenkette). Die Plattformen sind 2cm X 2cm groß und bilden bei gleichem Aufbau wie bei Ruf & Gallin eine Gesamtfläche von 20cm X 20cm. Die ganze PL besteht aus 99 einzelnen lose stehenden Hölzern und einer Grundplatte mit den Seitenbegrenzungen, die dem Ganzen mehr Halt verleiht. So können jederzeit einzelne (oder auch alle) Holzquader auch entnommen werden, miteinander verglichen und/ oder die PL selbstständig wieder aufgebaut werden. Die PL ist ein konstant ansteigendes Stufengebilde. Es beginnt mit einer 0, d.h. keinem Quader, daran knüpfen dann zwei 1er Holzquader an (eine Einheit ist 2cm X 2cm), die wiederum an drei 2er Holzquader anknüpfen, und so weiter, bis schließlich zehn 9er in einer Reihe stehen, dann sinkt die Anzahl der Holzquader wieder ab, bis zum Schluss ein 18er Turm (36 cm hoch) steht. D.h. in diesem Falle auch, dass auf jedem Fall (zu Anfang) nur bis 18 addiert werden kann.

2. Bearbeitung von verschiedenen Aufgaben an der PL

2.1 Klettern

Am Anfang des 1. Schuljahres werden die Zählfähigkeiten, über die die meisten der Kinder in einem angemessenen Ausmaß bereits verfügen, sehr beansprucht. Mit Hilfe der PL kann man bei einer leichten Additionsaufgaben wie zum Beispiel: $3+4=$ sehr leicht zum Ergebnis kommen, indem man beispielsweise wie folgt vorgeht:

Ich benutze hierzu eine Figur, mit der ich nun meine Aufgabe abwandere. Ich starte bei 0, indem ich die Figur dort platziere, wo sich kein Holzquader befindet. Nun sehe ich, dass von dieser Stelle aus 2 bequeme Treppen aus lauter Einerstufen ausgehen. Ich entscheide

mich für die linke Treppe und lasse meine Figur, den ersten Summanden, d.h. **3 Stufen** hochklettern: „Eins, zwei, drei!“ Nun sehe ich von dort aus wieder 2 bequeme Treppen. Zum einen die, auf der meine Figur bislang hochgeklettert ist und zum anderen eine die nach rechts oben verläuft. Um den 2. Summanden vom ersten kenntlich zu machen, entscheide ich mich hier für einen Wechsel der Treppe und schwenke meine Figur nach rechts: „Eins, zwei, drei, vier!“ Mit Hilfe von Zahlen auf den Türmen zeigt sich dann für mich als Laie schnell das Ergebnis 7, da ich auf einem Siebenturm mit meiner Figur gelandet bin. Die Aufgabe ist gelöst (siehe Foto 2). Ich kann das Ergebnis auch mit Hilfe der herausnehmbaren Holzlängen überprüfen. Ich nehme einen Holzquader, auf der ich gelandet bin heraus und kann im Vergleich der Längen z.B. von zwei 1ern und einem 5er beweisen, dass die Zielplattform wirklich 7 ist: $1+1+5=7!$

2.2 Zaubern/ freundliche Umwege

Nicht jede Rechnung muss mühsam geklettert werden. Denn wenn man einige Rechnungen schon auswendig weiß, so kann man sich auf einen Schlag hochzaubern. Man nimmt evtl. einen kleinen Umweg auf sich, um sich so ein Stück weit auf bequemem Weg zu befinden.

Eine Aufgabe lautet zum Beispiel: $8+9=$ __. Ich weiß eine freundliche Nachbaraufgabe zu dieser bereits auswendig, nämlich $8+8=16$. **16** ist einer meiner Zaubertürme, in luftiger Höhe (2 niedriger als 18). Jetzt lasse ich meine Figur noch 1 Stufe hochklettern ($8+9=8+8+1$) und schon lande ich auf meiner Zielplattform **17**. (siehe Foto 3)

Ich könnte aber in diesem Fall auch einen kleinen Umweg in Kauf nehmen. Da die Landschaft bis 18 geht, und ich weiß, dass $9+9=18$ ist, so befinde ich mich schnell auf diesem Zauberturm **18** (er ist schließlich der höchste von allen). Nun muss ich, da ich genau eine Stufe zu hoch geklettert bin, genau eine wieder herabklettern: $8+9=9+9-1$. Wie man hier sieht ist es auch kein Problem Stufen abzustiegen, d.h. zu subtrahieren. Ich habe die mir anfangs unangenehm erscheinende Additionsaufgabe einfach umgeformt, **Termumformung**. (siehe Foto 4)

Ich kann die Aufgabe auch anders ganz leicht abändern, indem ich zu dem 2. Summanden 1 dazu addiere, also zur vollen 10 ergänze, und von dem 1. Summanden den gleichen Wert 1 dann subtrahiere, so bleibe ich sicher auf dem gleichen Höhenweg: $8+9=7+10=17$. Damit ist dieser Turm keine Hürde mehr für mich, sondern ich habe hiermit einen Zauberturm auf gleicher Höhe gefunden.

2.3 Folgen springen/ Von der Addition zur Multiplikation

Hat man beispielsweise eine Additionsaufgabe mit lauter 2en als Summanden, dann lohnt es sich den steilsten Weg der Turmlandschaft einzuschlagen. Diesen nennt man auch Zweierfolge. Eine Aufgabe lautet zum Beispiel: $2+2+2+2+2+2=$ __. Ich setze meine Figur auf die 0 und lasse sie auf geradem Wege von der 0 auf die 2, dann weiter bis zur 4 und so weiter: „Zwei, vier, sechs, acht, zehn, zwölf!“ springen. So lande ich schnell mit kurzen Sprüngen auf der Zielplattform 12. Wie oft bin ich also in gleichen Abständen gesprungen? –Insgesamt 6 Mal! (siehe Foto 5)

Ich kann die Aufgabe auch leicht verkürzen, indem ich zwei 2er zu einem 4er zusammenfasse: $4+4+4=$. Auch hier wähle ich den steilsten Weg. Jetzt überspringe ich jede 2. gerade Zahl. So komme ich zur Viererfolge. Ich benötige nur noch 3 Sprünge bis zum Funktionswert 12.

▷ In der Mathematik schreibt man das dann auch folgendermaßen auf: $3*4=12$ bzw. $6*2=12$. Das ist dann eine Mal-Rechnung.

2.4 Rechnen mit vorgegebener Zielplattform

Eine Aufgabe kann auch so gestellt sein, dass der Funktionswert (ein Höhenweg) bereits vorgegeben ist und passende Summanden gefunden werden müssen.

Ich bearbeite hier nun folgende Aufgabe: $__+__=9$. Ich gehe alle möglichen Wege ab, wie in 2.1, d.h. ich lasse meine Figur z.B. zuerst von 0 angefangen 4 Stufen nach rechts oben hochklettern: „Eins, Zwei, drei, vier!“ und dann noch die restlichen 5 bis zur Neuner-Reihe in die andere Richtung: „Fünf, sechs, sieben, acht, neun!“ Ich sehe, dass ich auf dem 5. Neunerstab von rechts lande (siehe Foto 6). Ich kann natürlich auch sofort von der 0 aus zur 9 springen (siehe Foto7). Das bildet insofern keine Schwierigkeit, da die Neuner-Reihe die längste ist und an den Seiten heraussticht (Eckpunkte bildet). Von der 0 aus kann ich dann problemlos zu jedem 9er-Turm gelangen. Bleibe ich aber bei dem Schema des Richtungswechsels nach dem ersten Summanden, so gelange ich auf den 9er-Turm ganz links (oder ganz rechts). Wähle ich ganz verschiedene 1. Summanden, so erreiche ich bei diesem Schema bei jeder Aufgabe einen anderen Turm, auf gleicher Höhe (siehe Fotos 8,9,10). Ich schreibe mir die unterschiedlichen Aufgaben auf und sehe, dass die ganze Reihe der 9er-Türme für die möglichen Additionsaufgaben (mit 2 Summanden) mit dem Ergebnis 9 stehen.

3. Kritische Auseinandersetzung mit dem Material als didaktisches Hilfsmittel im Erstunterricht

Jeder Mensch, also auch jedes Kind, denkt anders, hat andere kognitive Strukturen, und so ist es auch in der Mathematik nicht verwunderlich, dass das mathematische Verständnis unterschiedlich ausgeprägt ist. Jedes Kind löst seine Aufgaben auf seine ihm viabel erscheinende Weise. Dem einen Kind fällt der eine Weg zur Lösung leichter, welcher wiederum einem anderen Kind als gerade sehr umständlich erscheint. Mit der PL können Kinder ganz unterschiedlich verfahren und ermöglicht somit einen vielfältigen Einstieg in den subjektiven Erarbeitungsprozess. Aufgaben sind auf vielen verschiedenen Wegen lösbar, wie unter **2.** bereits gezeigt. Die Kinder sind stets dazu aufgefordert Aufgaben auch auf einen jeweils anderen Weg zu lösen, um somit auch evtl. schwierige Aufgaben mit bequemen Aufgaben zu verbinden, mit so genannten Zaubertürmen. Dabei ist es wirklich wichtig, dass die Kinder sich ihre Lösungswege selber (subjektiv) erarbeiten. Es macht wenig Sinn ihnen diese zu erklären, da die Aneignung von Wissen ein konstruktiver, individueller Prozess ist. Das besagt auch der radikale Konstruktivismus (Ernst von Glaserfeld). Jeder lernt anders und so ist jeder Weg zur Lösung richtig. Er muss nur begründet werden können.

Das Gebilde der Pluslandschaft sieht mit seinen vielen steil ansteigenden Stufen sehr beeindruckend aus und spricht Kinder meiner Meinung nach sehr an. Das Wachsen der Zahlen, die die Stäbe repräsentieren, sieht unaufhaltsam aus. Wird man ihnen Figuren auf die Landschaft stellen, so werden sie sie in kürzester vermutlich bewegen und sie etliche Stufen rauf und runter klettern lassen. Das ist das schöne an dieser Landschaft. Sie wirkt so einladend auf eine Reise: hin und her, hoch und runter.

3.1 Minus

Zur Addition gehört auch immer die Subtraktion. Genau so, wie mit der Addition verfahren wird, so kann auch mit der Pluslandschaft subtrahiert werden. Bei den Aufgaben, bei denen sich ein bequemer Umgang lohnt, muss man ja schließlich auch wieder Stufen herabsteigen. Man kann aufgrund der grenzenlosen Erweiterung auch nach unten schon bis in den negativen Bereich rechnen. Das ist aber im Erstunterricht noch kein Thema. Die Zielplattform befindet sich hier, anders als bei der Addition auf einer niedrigeren Plattform als die 1. Zahl des Terms, die Zahl wird kleiner.

3.2 Kraft der Fünf

Die Kraft der Fünf kommt hier nicht zur Geltung. Das Material gibt kaum Hilfestellungen her. Es gibt keine Markierungen von bestimmten Holztürmen, keine Farbliche Unterma- lung und auch keine Beschriftungen. So etwas würde nur den prädikativen Blick (für stati- sches Da-sein) einladen und der ist hier nicht erwünscht.

Nur sobald man den Sprung von der 0 zur 5 geschafft hat und nun immer weiter Fünfer- sprünge macht, so lernt man die Fünferfolge („die ich persönlich als schwer zu springen empfinde), aber eine Bündelung zur schnelleren Erfassung von Vielfachen der 5 ist nicht gegeben. Das Gleiche gilt dann auch folglich für die Kraft der Zehn.

Dafür werden viele andere individuelle Kräfte stark!

3.3 Zehnerübergang

Wie sieht es bei Additions-Rechnungen aus, deren Ergebnisse größer sind als 10?

Der Zehnerübergang wird an der PL selber nicht deutlich. Es gibt hier keine Zehnerunter- teilung oder Ähnliches. Erst durch entsprechende Umformungen der Aufgabe bis zum Beispiel schließlich der eine Summand ein voller Zehner ist, ist die Zehn als solches zu er- kennen, aber nur auf dem Papier oder in Gedanken. Diese Zehn ist dann ein leichter Zau- berturm, von dem die restlichen Stufen dann noch erklommen werden. Die Zehner-Reihe befindet sich direkt hinter der Neuner-Reihe, die leicht zu erkennen ist, weil diese Reihe die längste bildet.

3.4 Verschriftlichung

Gleichzeitig zu dem tätigen/ dynamischen Handeln sollten die Kinder ihre erarbeiteten Aufgaben und Ergebnisse festhalten. Dabei wäre es meiner Meinung nach auch sinnvoll wie in dem Text von Ruf & Gallin (1995) zu Anfang eine Plustabelle (bis 9+9) zu verteilen und ihren Aufbau zu besprechen. Anschließend soll jeder für sich die Resultate anmalen, dessen Rechnung er bereits weiß. Auf diese Weise wird deutlich welche Rechnungen noch als sperrig und schwer empfunden werden. Vorerst sollen sie sich nur eine dieser schwieri- gen Aufgaben heraussuchen und notieren. Mit Hilfe der Plustabelle können sie dann be- queme Nachbaraufgaben suchen und sollen den neuen Term ebenfalls notieren. Mit Hilfe mehrerer Figuren, können die Ergebnisse der verschiedenen Termumformungen verglichen und nahezu eigenständig kontrolliert werden. Durch notieren und gleichzeitiges Tun er- kennen Kinder auch, wie man einen Term umändern muss, um auf gleicher Höhe, d.h.

beim gleichem Ergebnis zu bleiben. Es wird z. B. notiert: $0+3=3$ $1+2=3$ $2+1=3$
 $3+0=3$

3.5 Funktionales Denken/ Denken in Wirkungsweisen

Die PL ist ein besonderes didaktisches Hilfsmittel, welches geeignet ist funktionales Denken zu fordern und zu fördern. Beim ständigen tätigen Umgang/ Arbeiten mit der PL wird das wiederholte Funktionieren der Konstruktionsschritte getestet (jede Plusrechnung bedeutet ein Wandern) und neue erprobt, Nachbarschaftsverhältnisse von Aufgaben und ihren Ergebnissen werden offenkundig. Kinder lassen ihre kleinen evtl. persönlichen Zwerge (Figuren) die Turmlandschaft erklimmen und erfahren somit viel über Zahlen und den zugehörigen Aufgaben, Aufgaben, die sie bereits kennen und auch Aufgaben, die ihnen noch Schwierigkeiten bereiten. Leichte Additionsaufgaben, die die vielleicht Kinder bereits aus dem Kindergarten kennen, wie z.B.: $1+1=2$, $2+2=4$, $3+3=6$, $4+4=8$, ...verhelfen ihnen schnell zu vielen so genannten Zaubertürmen im unteren Bereich der Landschaft, die dann bei ähnlichen, benachbarten Aufgaben zu ihrem Vorteil verwendet werden können. Die Kinder werden hier zu Beweglichkeit beim Term-Umformen ermuntert und können sich so auf diese Weise nach und nach mit zunehmender Leichtigkeit über die Plus-Landschaft bewegen. Immer größere Sprünge werden mit zunehmenden Zaubertürmen möglich. So wirkt das Rechnen im größeren Zahlenraum auch gleich viel dynamischer. Ist die Rechnung $100+100$ bekannt, so ist ein Sprung auf die 200 kein Problem mehr, lästiges Klettern ist nicht mehr nötig. Die ganze Rechenlandschaft ist nach allen Seiten hin bis ins Unendliche (in Gedanken) erweiterbar und ist daher auch im 2. Schuljahr brauchbar.

3.6 Zählendes und denkendes Rechnen

Der Umgang mit der Rechenlandschaft zwingt einen allmählich vom zählenden Rechnen (d.h. auf die Rechenlandschaft bezogen: klettern) zum denkenden Rechnen (d.h. springen). Zu Anfang werden leichte Aufgaben mit kleinen Summanden zeitgleich abgewandert und abgezählt. Aufgaben und Ergebnisse werden durch mehrfaches Erproben gefestigt und können nun gleich verwendet werden, ohne sie weder lästig abzählen noch abwandern zu müssen. Sprünge zu den individuellen Zaubertürmen werden möglich und können jederzeit erweitert werden.

Die Strategie des Fastverdoppelns wird hier ähnlich genutzt wie beim Zwanzigerfeld. Ich weiß zum Beispiel, dass $7+7=14$ ist, und so kann ich leicht ohne Mühe eine erst schwieri-

ger erscheinende Aufgabe wie $6+7$ lösen. Ich gehe vom Zauberturm 14 aus einfach eine Stufe runter und lande dann auf meiner Zielplattform 13.

Wie man sieht werden hier Zusammenhänge zwischen Zahlensätzen für geschicktes Rechnen ausgenutzt, so dass nicht jede Aufgabe für sich berechnet werden muss.

Mit Hilfe dieser Rechenlandschaft wird der Aufbau eines numerischen Netzwerkes unterstützt.

Eine Bildung tragfähiger mentaler Vorstellungsbilder ist insofern möglich, als dass die Rechenlandschaft aufgrund ihrer doch einfachen Beschaffenheit, einfacher Strukturierung, gut einprägsam ist. Man kann nach mehrfachem Umgang mit ihr die Stufen vor Augen sehen und Aufgaben mit Zaubertürmen errechnen. Man muss schließlich bei Nachbaraufgaben nur noch einige Stufen (hoch oder runter) zurücklegen bis zur Zielplattform.

4. Schluss

Insgesamt ist die PL meiner Meinung nach ein geeignetes Material (abgesehen von der schlechten Transportierbarkeit und dem hohen Preis) zur Übung und Festigung von Aufgaben und ihren Ergebnissen mittels eigenständigen Abänderns vorgegebener Rechenaufgaben. Außerdem wird auch die Motorik der Kinder beansprucht und gefördert wenn sie ihre Zwerge im dynamischen Proress über die PL wandern lassen. Dennoch finde ich es problematisch, dass man sich an diesem Modell, welches dem von Ruf & Gallin gleicht, immer stärker an der 9 orientiert. In unserem Dezimalsystem müsste meiner Meinung nach eher die 10 im Vordergrund stehen. Und auch wenn sich die PL von einem prädikativen Blick zur 10 entziehen möchte, so ist er ja doch auf die 9 (und auch auf die 18) gerichtet.

► Die 10 liegt eine höher als die 9er-Reihe.

5. Quellenverzeichnis

Müller, Gerhard N./ Wittmann, Erich Ch. (hrsg): Arbeitskreis Grundschule: Mit Kindern rechnen; Text: *Krauthausen, Günther*: Die „Kraft der Fünf“ und das denkende Rechnen; Frankfurt am Main

Ruf, Urs/ Gallin, Peter: Ich mache es so! Wie machst du es? Das machen wir ab. 1995; Lehrmittelverlag des Kantons Zürich

Schwank, Inge: Analysen: Einführung in prädikatives und funktionales Denken; ZDM 2003 Vol. 35 (3); Osnabrück