Universität Osnabrück
Fachbereich Mathematik/Informatik
Wintersemester 2003/4
Veranstaltung: Grundkurs Didaktik der Mathematik I (6.306)

Prof. Dr. Inge Schwank

Ausarbeitung zur Pluslandschaft, angefertigt im Rahmen des Erstrechenscheins

Tanja Köster

Lehramt an Grund-, Haupt- und Realschulen
Fächer Sachunterricht, Mathematik und Englisch
7. Fachsemester

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Zu Beginn dieser Ausarbeitung möchte ich den grundsätzlichen Aufbau einer Pluslandschaft[1] vorstellen. Dazu werde ich zunächst auf die, der PL zugrunde liegenden, Plustabelle eingehen. Im Anschluss daran werde ich die von mir hergestellte PL vorstellen. Nachfolgend soll der Gebrauch der PL in der Praxis anhand einiger Aufgaben verdeutlicht werden. Anschließend möchte ich die Vor- und Nachteile der PL und des dazugehörige Schulbuches beleuchten. Dabei werde ich gesondert aufzeigen, inwieweit die PL den Anforderungen genügt, die Günther Krauthausen in dem Aufsatz „Das „Prinzip der Fünf“ und das denkende Rechnen“ veröffentlicht hat. Den Schluss der Arbeit bildet eine abschließende Stellungnahme.

2. Die Plustabelle und die Pluslandschaft

In der Plustabelle werden im Wesentlichen die Additionsaufgaben dargestellt, die in der ersten Grundschulklasse bearbeitet werden. Sie ist aber darüber hinaus beliebig erweiterbar, so dass die Kinder sie auch in den folgenden Klassen nutzen können. Neben Additionsaufgaben können auch Subtraktionsaufgaben mit der PL bearbeitet werden. Das soll allerdings an anderer Stelle näher erläutert werden. In der obersten Zeile der Plustabelle sind das Additionszeichen und die natürlichen Zahlen bis Neun eingetragen, wobei auch die Null berücksichtigt wird. Selbiges findet sich in der ersten Spalte. Diese Zahlen bilden die beiden Summanden der Additionsaufgaben. So entstehen z.B. die Aufgaben 0+0, 0+1, 0+2 usw. Die Ergebnisse der Aufgaben sind bereits in den entsprechenden Feldern eingetragen. Die Schüler können die Plustabelle erweitern, indem sie die auf die Neun folgenden natürlichen Zahlen in die erste Zeile, sowie die erste Spalte, eintragen und die Tabelle mit den Ergebnissen der sich daraus ergebenden Aufgaben vervollständigen. Ebenso kann man die Tabelle in den negativen Bereich erweitern, indem man die ganzen Zahlen zugrunde legt.
Die PL ergibt sich aus der Plustabelle, wenn man auf die Felder, in denen die Ergebnisse der Aufgaben eingetragen sind, einen Turm aus Würfeln baut. Dabei richtet sich die Anzahl der Würfel, also die Höhe des Turms, nach der Zahl, die in dem jeweiligen Feld eingetragen ist. So wäre auf einem Feld mit der Zahl „1“ nur ein Würfel, auf einem Feld mit der Zahl „2“ zwei Würfel und auf dem Feld mit der „0“ gar kein Würfel. Allerdings besteht die PL in der Praxis nicht aus einzelnen Würfeln, sondern aus ganzen Türmen.

3. Meine Pluslandschaft

Nun möchte ich den Aufbau der von mir hergestellten PL erläutern. Ich habe mich entschieden das Modell aus Holz anzufertigen, da Holz einerseits ein sehr strapazierfähiges Material ist und sich daher für Kinder besonders eignet und andererseits leicht zu bearbeiten ist. Bei der Überlegung, wie groß mein Modell werden soll, habe ich beachtet, dass das gesamte Modell nicht so schwer wird, dass es für Kinder nicht mehr zu bewältigen ist und, dass die einzelnen Türme nicht so klein sind, dass sie leicht verlorengehen. Daher habe ich festgelegt, dass eine Längeneinheit 1,9cm lang sein soll. Um meiner PL mehr Stabilität zu geben, habe ich an dem Boden, auf dem die Türme stehen, eine höhere Umrandung angebracht, als sie bei dem Lehrermodell, das uns präsentiert wurde, vorhanden ist. Dabei habe ich darauf geachtet, dass sie deutlich niedriger ist, als die dahinter liegenden Türme, damit sie die Arbeit mit der PL nicht behindert. Daraus ergab sich an zwei Seiten eine, der Steigung der PL entsprechende, Schräge.

4. Der praktische Gebrauch der Pluslandschaft

Nun soll der praktische Gebrauch der PL anhand einiger Aufgaben verdeutlicht werden. Zum besseren Verständnis werde ich vorab noch einige grundlegende Informationen zum Rechnen mit der PL geben. Bei der Bearbeitung von Additionsaufgaben stellt man zunächst einen der Summanden an der PL dar, indem man eine Figur auf das „0“-Feld stellt und anschließend die dem Summanden entsprechende Anzahl Stufen nach links oder rechts „emporsteigt“. Nun wird der andere Summand dargestellt, indem man in die andere Richtung (rechts/links) die diesem Summanden entsprechende Anzahl Stufen hinaufgeht. Dann befindet sich die Figur auf dem Turm, der das Ergebnis der Aufgabe darstellt, so dass das Ergebnis leicht abgelesen werden kann. Die Aufgaben, die nun dargestellt werden sollen, gehören zu drei unterschiedlichen Kategorien. Die erste Kategorie habe ich „10er-Kategorie“ genannt. Sie umfasst alle Additionsaufgaben, deren Ergebnis die Zehn ist. Ebenso gibt es dann auch die „1er-Kategrie“, die „2er-Kategorie“ usw. Ich habe mich hier aber für die 10er-Kategorie entschieden, weil die Zehn in unserem Zahlensystem eine außerordentlich wichtige Rolle spielt, so dass ihr besondere Aufmerksamkeit geschenkt werden sollte. Der Aufbau der PL und insbesondere die zahlreichen Türme gleicher Höhe verdeutlichen, dass es viele verschiedene Wege gibt die Zehnerebene zu erreichen. Diese Erkenntnis, die durch die Aufgaben der 10er-Kategorie gefördert werden soll, spielt besonders im Zusammenhang mit der Zerlegung von Zahlen und dem Zehnerübergang eine wichtige Rolle. Die Aufgaben der 10er-Kategorie, die hier vorgestellt werden sollen, sind 5+5, 3+7 und 6+4. Bei der ersten Aufgabe wandert man zunächst mit einer Figur fünf Stufen nach oben. Normalerweise würde man diese Figur anschließend weitere fünf Stufen in die andere Richtung nach oben setzen, um das Ergebnis der Aufgabe ablesen zu können. Ich habe aber, um die Aufgaben in einem Bild darstellen zu können, zwei verschiedenfarbige Figuren verwendet. Ich beginne mit einer grünen Figur und stelle

[1] Ich kürze im Folgenden das Wort „Pluslandschaft“ mit PL ab.

den ersten Summanden dar. Anschließend arbeite ich mit einer blauen Figur[2] weiter, die dann auf dem Turm zum Stehen kommt, der das Ergebnis symbolisiert (vgl. Bild 1). Ebenso verfahre ich bei den übrigen beiden Aufgaben dieser Kategorie (vgl. Bild 2 und Bild 3).

Mit der zweiten Kategorie möchte ich die Möglichkeit, mithilfe der PL auch Aufgaben mit größeren Zahlen zu bearbeiten, verdeutlichen. Gleichzeitig möchte ich demonstrieren, dass auch Subtraktionsaufgaben mit der PL gerechnet werden können. Die Aufgaben dieser Kategorie, die hier betrachtet werden sollen, sind 78+7 und 56-9. Eigentlich wäre für die Bearbeitung dieser Aufgaben eine sehr viel umfangreichere PL nötig. Man kann sie aber auch mit dem hier verwendeten Modell rechnen, wenn man die „Belegung" der Türme verändert. Dabei stellt man sich vor, dass dieses Modell der PL nur die Spitze, also ein Ausschnitt, einer umfangreicheren PL ist. Zur Bearbeitung der ersten Aufgabe 78+7 legt man sinnvollerweise fest, dass das „0"-Feld die Spitze des 70er-Turms ist. Anschließend kann man wie gewohnt rechnen, wenn man die neue Belegung der übrigen Türme berücksichtigt (Bild 4). Bei der Aufgabe 56-7 beginnt man, da es sich hier um eine Subtraktionsaufgabe handelt, im oberen Teil der PL. Nun stellt man sich vor der 18er-Turm sei das oberste Stück des 58er-Turms. Nun kann man den Minuend darstellen, indem man die Figur zwei Stufen tiefer stellt. Anschließend fügt man die Darstellung des Subtrahenden hinzu, indem man die Figur um neun Stufen in die andere Richtung tiefer stellt (Bild 5). Nun kann man das Ergebnis wie gewohnt ablesen.

Mit der dritten Kategorie möchte ich zeigen, dass die PL auch einen Beitrag zum Verständnis von Multiplikationsaufgaben leisten kann. Dazu werde ich beispielhaft auf das kleine Einmaleins der 2 eingehen. Voraussetzung dieser Eigenschaft der PL ist die Möglichkeit Additionsaufgaben mit mehr als zwei Summanden bearbeiten zu können. Dazu sind lediglich weitere „Richtungsänderungen" nötig, um die einzelnen Summanden voneinander abzugrenzen. Stellt man z.B. den ersten Summanden der Aufgabe 2+2+2+2+2+2+2+2 dar, indem man zwei Stufen zur linken Seite nach oben wandert, muss man den zweiten Summanden darstellen, indem man nach rechts wandert. Beim dritten Summanden wandert man wiederum nach links, beim vierten Summanden nach rechts usw. (Bild 6)[3]. Lässt man die Schüler, wie in diesem Beispiel, mit Markierungen arbeiten, so dass die einzelnen Summanden deutlich erkennbar bleiben, wird offensichtlich, dass man achtmal den Summanden 2 addiert hat. Eine weitere Möglichkeit die Schüler an das kleine Einmaleins der 2 heranzuführen, ist z.B. mit einer Figur genau in der Mitte der PL die Treppe empor-

[2] Die blaue Figur wurde zu Beginn über die grüne Figur gestülpt, so dass man den Eindruck hat, man arbeite die ganze Zeit mit der blauen Figur. Die grüne Figur hat dann vielmehr nur eine Markierungsfunktion.

[3] Um das kleine Einmaleins der 2, bis auf 9*2 und 10*2, vollständig darzustellen, habe ich auch eine Markierung auf das „0"-Feld gesetzt. Dabei ist zu bemerken, dass eigentlich bei jeder Aufgabe eine Markierung auf dem „0"-Feld sein müsste, da auch Additionsaufgaben bei der Null beginnen, weil es genau genommen heißt: 0+a+b.

zusteigen und auf jeder Stufe eine Markierung abzustellen (Bild 7). Nun könnte man die Schüler das entstandene Bild analysieren lassen.

5. Bewertung der Pluslandschaft und des dazugehörigen Schulbuches

Die bearbeiteten Aufgaben der verschiedenen Kategorien demonstrieren die vielfältigen Nutzungsmöglichkeiten der PL. Darüber hinaus weisen sie auf weitere wesentliche Vorteile hin, die im Folgenden näher betrachtet werden sollen.
Bei der praktischen Durchführung von Rechenoperationen mit der PL ist es möglich, die verschiedenen Mengen deutlich voneinander zu trennen, ohne das sich ein verwirrendes Bild ergibt. Ein solches missverständliches Arrangement entsteht beispielsweise, wenn man eine Additionsaufgabe durch einen Blumenstrauß darstellt, bei dem die Summanden durch verschiedene Farben gekennzeichnet sind. Zusätzlich bleibt bei dieser Vorgehensweise der Vorgang der Addition unberücksichtigt (Schwank 2003, S. 75). Im Gegensatz dazu steht der Vorgang der Rechenoperationen bei der PL im Mittelpunkt der Aufmerksamkeit, indem sie durch das Umherwandern in der PL von den Kindern selbst ausgeführt werden. Daher handelt es sich bei der Arbeit mit der PL nicht um eine passive Beobachtung, sondern um eine aktive Verursachung und Inganghaltung des Vorgangs, so dass die Arbeit mit der PL die Ausbildung funktionaler Vorstellungen fördert (vgl. Schwank 2003, S.71).
Das Schulbuch „Ich mache das so! Wie machst du es? Das machen wir ab.“, das auf die Arbeit mit der PL basiert, unterstützt weitere positive Merkmale dieses mathematikdidaktischen Materials. Es fordert die Schüler vielfach auf zunächst eigene Lösungsstrategien zu entwickeln, anstatt den Lösungsweg anderer zu übernehmen. So wird die Selbstständigkeit, die Fähigkeit Problemlösungsstrategien zu entwickeln und das geschickte Ausnutzen von Gesetzmäßigkeiten gefördert. Nachdem die Schüler eine Aufgabe mithilfe eigener Rechenstrategien bewältigt haben, sollen die verschiedenen Lösungswege der Kinder verglichen und analysiert werden. So können sie bei folgenden Rechnungen einige Aspekte dieser Strategien, die ihnen vorteilhaft erscheinen, in ihre Überlegungen integrieren. Auf diese Weise wird die Ausbildung einer gewissen Flexibilität unterstützt, da die Kinder sich in die unterschiedlichen Denkweisen und den daraus resultierenden Problemlösungsstrategien hineindenken müssen und erfahren, dass in der Mathematik viele Wege zum Ziel führen. Darüber hinausgehend wird die Flexibilität gefördert, indem die Schüler mehrere unterschiedliche Lösungsstrategien zu einem Problem entwickeln sollen. Selbstverständlich unterstützt diese Vorgehensweise die Kommunikationsfähigkeit der Kinder und sie wird leistungsstarken, wie auch leistungsschwachen, Schülern gerecht. Die Kinder können ihren Vorlieben und Fähigkeiten entsprechende Lösungsstrategien entwickeln, so dass ihr Lernfortschritt ihrem individuellen Kenntnisstand und ihren Fähigkeiten angepasst ist.

Die dargestellte Vorgehensweise ist zweifellos anspruchsvoll und für die Kinder zunächst mit mehr Aufwand und Anstrengung, aber auch mit einem größeren Lernzuwachs, verbunden, als das bloße Anwenden von übernommenen Rechenwegen. In dem Schulbuch will man die Schüler für diesen anspruchsvollen Unterricht motivieren, indem man wiederholt darauf hinweist, dass ein größerer Aufwand an eigenen Überlegungen zu einem bequemeren und schnelleren Rechnen führt. Aufgaben, die den Kindern zunächst schwierig erscheinen, können, durch geschickte Umformungen im Hinblick auf bekannte und einfache Rechnungen, bald ebenso schnell und mühelos bearbeitet werden. Diese einfachen Rechnungen, auf die die Kinder zurückgreifen, werden in dem Schulbuch für Kinder verständlich als freundliche Nachbarn bezeichnet. Die Arbeit mit der PL, indem eine Figur von Stufe zu Stufe gesetzt werden soll, wird anhand eines Umherwanderns eines Zwerges erläutert. Aufgrund seiner Körpergröße ist es für den Zwerg sehr mühsam die PL Stufe für Stufe zu erklimmen. Das Kind kann ihn aber, sofern dem Kind die Lösung der Rechenaufgabe bekannt ist, direkt auf den entsprechenden Turm zaubern, ohne dass er mühsam Stufen hinaufklettern muss. Auf diese Weise wird praktisch demonstriert, wie schwierige Aufgaben durch die Berücksichtigung von freundlichen Nachbarn schnell und mühelos gerechnet werden können. Dazu möchte ich ein Beispiel anführen. Das Ergebnis der für viele Kinder schwierigen Aufgabe 7+8 kann ermittelt werden, indem man in bereits beschriebener Weise Stufe für Stufe abzählt. Dies ist aber eine für den Zwerg sehr anstrengende Vorgehensweise, was eine weitere Motivation des Kindes darstellt nach einem einfacheren Weg zu suchen. In dieser Absicht kann es z.B. auf die bekannte, einfache Aufgabe 8+8 zurückgreifen. Es weiß, dass das Ergebnis der bekannten Aufgabe 16 ist. Folglich kann es den Zwerg direkt auf den 16er-Turm zaubern. Weiter überlegt es sich, dass das Ergebnis der Aufgabe 8+8 einen Turm höher liegen muss, als das Ergebnis der Aufgabe 7+8. Folglich muss der Zwerg nur noch eine Stufe hinabklettern, um das richtige Ergebnis anzuzeigen. Auf spielerische, kindgerechte Weise hat das Kind nun folgende komplizierte Überlegung durchgeführt: $7 + 8 = (8 + 8) - 1 = 16 - 1 = 15$

Nachdem die positiven Merkmale des Schulbuches und der PL ausführlich besprochen wurden, sollen nun auch einige negative Eigenschaften aufgezeigt werden. So wurde das Schulbuch unter anderem für die erste Klasse entwickelt und muss daher auch für Kinder zu bearbeiten sein, die nicht gut lesen können. Daher bin ich der Meinung, dass die langen Texte des Schulbuches nachteilig sind, da die Kinder wahrscheinlich überfordert sind und Verständnisprobleme haben. Außerdem wird die PL erst auf der Seite 134 eingeführt, so dass sie den Kindern lange Zeit nicht zur Verfügung steht. Die Ausführungen zur PL haben gezeigt, dass sie bei der Bearbeitung vieler verschiedener Aufgaben genutzt werden kann, aber die simple Aufgabe 10 +10 kann nicht bearbeitet werden, da es keine Treppe innerhalb der Pluslandschaft gibt, die mehr als neun Stufen hat.

Ist nur der erste Summand größer als neun, so könnte man die Belegung der Türme entsprechend anpassen. Gilt das aber für beide Summanden ist das nicht möglich, da man die Belegung der Türme ja nicht bei dem zweiten Summanden nochmals ändern kann. Voraussetzung für diese Überlegung ist allerdings, dass jede erklommene Stufe die mathematische Bedeutung +1 hat.
Nun soll die PL im Hinblick auf die Anforderungen, die Günther Krauthausen in dem Aufsatz „Die „Kraft der Fünf“ und das denkende Rechnen“ an den Mathematikunterricht der Grundschule stellt, betrachtet werden.

5.1 Besprechung der Pluslandschaft auf Hintergrund des Aufsatzes „Die „Kraft der Fünf“ und das denkende Rechnen“ von Günther Krauthausen

Die Motivation und Anregung der Kinder nach einfachen und schnellen Lösungswegen von schwierigen Aufgaben zu suchen, stellt die von Günther Krauthausen geforderte Unterstützung des Übergangs vom zählenden zum denkenden Rechnen dar. Die Bearbeitung von Rechenaufgaben, indem die Figur die PL Stufe für Stufe erklimmen muss, ist ein Ausdruck des zählenden Rechnens, weil lediglich die Zählmethode eingesetzt wird und Rechenstrategien unberücksichtigt bleiben. Da sich das zählende Rechnen bei der PL aber nicht nur in den Gedanken des Kindes stattfindet, sondern auch konkret ausgeführt wird, indem die Figur jeweils nur eine Stufe höher gesetzt wird, bemerken die Kinder schnell, dass das zählende Rechnen mühsam ist und viel Zeit in Anspruch nimmt. Darüber hinaus kann der Lehrer, indem er die Schüler beim Bearbeiten von Aufgaben beobachtet, ermitteln, ob sie lediglich zählen oder Rechenstrategien anwenden und entsprechend reagieren. Damit wird hier das von Krauthausen erläuterte Problem umgangen, dass die Nachteile des zählenden Rechnens oft erst so spät spürbar werden, dass ein Übergang zum denkenden Rechnen sehr schwierig ist (Krauthausen 1995, S. 91). Das denkende Rechnen kommt bei der Arbeit mit der PL zum Ausdruck, wenn das Kind auf freundliche Nachbarn zurückgreift und somit effektive Rechenstrategien nutzt. Dabei entwickelt es, wie bereits erläutert, die von Krauthausen geforderte flexible Rechenfähigkeit und –fertigkeit. Das Ziel des denkenden Rechnens ist es, dass Kinder eine innere Vorstellung von Zahlen und Rechenoperationen aufbauen, so dass sie bei der Bearbeitung von Rechenaufgaben ein mentales Bild vor ihrem inneren Auge sehen und die zur Lösung erforderlichen mathematischen Handlungen allein in ihrer Vorstellung vornehmen. Die Voraussetzung hierfür ist, dass die Kinder unterschiedliche Lösungswege erarbeiten und analysieren, aber auch, dass sie, anhand eines geeigneten Materials veranschaulicht werden. Ich habe in vorhergehenden Teilen dieser Arbeit bereits erläutert, dass die ersten beiden Voraussetzungen bei der PL zutreffen. Meiner Meinung nach ist die PL ein nach Krauthausens Kriterien geeignetes Material, da sie einerseits konkret ist, aber andererseits auch abstrakt, so dass die Bildung mentaler Vorstellungsbilder erleichtert wird. Zwar genügt sie nicht den Anforderungen des Prinzips

„Kraft der Fünf“, da die Fünferstruktur in Form es Fünferturms gegenüber den übrigen Türmen keine übergeordnete oder besondere Rolle spielt und aus dem einzelnen Fünferturm nicht hervorgeht, dass er eigentlich aus fünf Einerwürfeln besteht. Selbiges gilt für den Zehnerturm. Somit ist eine besondere Förderung im Hinblick darauf, dass die Kinder die Struktur unseres Zahlensystems begreifen, indem der Fünf als Unterstruktur der Zehn oder der Zehn selbst besondere Aufmerksamkeit geschenkt wird, nicht gegeben. Trotzdem ist die simultane Erfassung von Anzahlen möglich, da, anhand des entsprechenden Turms, auf Anhieb auf die repräsentierte Zahl geschlossen werden soll. Außerdem trainiert die PL die Ausbildung von Vorstellungsbildern, da man sich z.B. vorstellt das vorliegende Modell sei nur die Spitze eines größeren Modells, wenn Aufgaben mit großen Zahlen mithilfe der PL bearbeitet werden.

6. Abschließende Stellungnahme

Aufgrund der vorhergehenden Ausführungen beurteile ich den Einsatz der PL überwiegend positiv. Aus diesem Grund würde ich empfehlen sie früher einzuführen, als es in dem Schulbuch vorgesehen ist. Dabei ist aber zu beachten, dass die PL den Kindern die Struktur unseres Zahlensystems nicht verdeutlicht. Deshalb würde ich zusätzlich den Einsatz eines weiteren mathematikdidaktischen Materials, wie z.B. der Rechenkette oder des Zwanzigerfelds, vorschlagen, um diesen Mangel auszugleichen. Außerdem könnten dann mehr Aufgaben bearbeitet werden, weil die PL nicht bei allen Aufgaben einsetzbar ist. Der Einsatz verschiedener Materialien würde dann, da ihnen unterschiedliche Konzepte und Zielvorstellungen zugrunde liegen, verschiedene Vorgehensweisen provozieren und somit zu unterschiedlichen Lösungswegen führen.

7. Anhang

7.1 Literaturverzeichnis

Krauthausen, Günther: Die „Kraft der 5“ und das denkende Rechnen, In: Gerhard N. Müller und Erich Ch. Wittmann: Mit Kindern rechnen. Frankfurt am Main, 1995

Ruf, Urs; Gallin, Peter: Ich mache das so! Wie machst du es? Das machen wir ab. Lehrmittelverlag des Kantons Zürich

Schwank, Inge: Einführung in prädikatives und funktionales Denken. ZDM 2003 Vol. 35 (3)