Universität Osnabrück
Wintersemester 2003/ 2004
Dozentin: Prof. Dr. Inge Schwank

Pluslandschaft

Erstrechenschein für die Grundschule

Name: Carina van der Pütten
Adresse:
Matrikelnummer:
e-Mail:

Das Mathematikbuch: „Ich mache das so! Wie machst Du es? Das machen wir ab.“ von Urs Ruf und Peter Gallin diente mir als Grundlage zur Herstellung einer Pluslandschaft. Die von mir gefertigte Pluslandschaft ist aus Holz, wodurch sie eine gewisse Stabilität erhält und auch gut von jüngeren Schülern verwendet werden kann. Die Pluslandschaft ist stufenartig aufgebaut. Sie besteht aus 18 Stufen, die von einzelnen Stäben derselben Höhe gebildet werden. Die einzelnen Stäbe haben alle die Grundfläche 1,4cm x 1,4cm. Die Stäbe der ersten Stufe sind 1cm hoch, die Stäbe der folgenden Stufen sind jeweils einen Zentimeter höher als die vorangegangene Stufe. Die letzte Stufe ist 18cm hoch.

Man kann die Stäbe auf einer Plustabelle aufstellen, denn nach dieser Tabelle ist die Pluslandschaft aufgebaut. Die Plustabelle auf der die Pluslandschaft basiert ist die „0 + 0 – Tabelle bis 9“ (siehe Anhang), d. h. dass die Zahlen von 0 bis 9 einmal zeilenweise und einmal spaltenweise notiert sind. Jede Zahl der zeilenweise notierten Zahlen wird mit jeder Zahl der spaltenweise notierten Zahl addiert. Man kann die Pluslandschaft auf die Plustabelle aufstellen, so dass die Stäbe der Höhe 1cm auf der Zahl 1 in der Tabelle stehen, die mit der Höhe 2cm auf der Zahl 2 usw.. Die einzelnen Stufen stehen für die Zahlen. Es gibt immer mehrere Stäbe, die für dieselbe Zahl stehen, da sie dieselbe Höhe haben. So gibt es z. B. zwei Stäbe der Höhe 1cm, drei mit der Höhe 2cm, zehn Stäbe der Höhe 9cm, 9 mit der Höhe 8cm und einen Stab der Höhe 18 cm. Die Zahl 9 tritt am häufigsten auf, deshalb ist die 9. Stufe die breiteste. Man kann herausfinden, warum es bei der Zahl 9 zehn Stäbe gibt, indem man herausarbeitet, wie viele Additionsaufgaben es zur 9 gibt. Es gibt nämlich genau zehn Aufgaben: 0 + 9, 1 + 8, 2 + 7, 3 + 6, 4 + 5, 5 + 4, 6 + 3, 7 + 2, 8 + 1, 9 + 0.

Zu den anderen Zahlen, die niedriger sind als die 9, lassen sich auch immer genauso viele Additionsaufgaben finden, wie es Stäbe derselben Stufe gibt. Für die Zahlen die höher sind als 9 gilt dies nicht, da man Aufgaben wie 1 + 11 nicht in der Plustabelle finden kann, man müsste für solche Aufgaben die Plustabelle erweitern.

Ich finde gut, wie hier die Null dargestellt ist. Die Null ist durch die 0. Stufe dargestellt, also die Stufe, die sich vor der 1. Stufe mit den beiden Stäben der Höhe 1cm befindet. Für die Stufe 0 gibt es keinen Stab, es müssen also 0cm in die Höhe gegangen werden.

Durch die von mir gewählten Maße ist die Pluslandschaft 14 cm lang und breit und 18cm hoch. Dadurch ist die Pluslandschaft relativ leicht, klein und handlich, so dass man sie gut transportieren kann. Ich habe einen Karton angefertigt, der zum einen den Stäben halt geben soll, da sie sonst leicht umfallen können und zum anderen ermöglicht der Karton, dass man direkt beginnen kann mit der Pluslandschaft zu arbeiten, ohne jedes Mal alles aufbauen zu müssen. Dieses fände ich von Nachteil, da es sehr zeitintensiv sein kann, bis alles aufgebaut ist.

Trotz des Kartons lassen sich dennoch alle Stäbe gut herausnehmen. Dies finde ich gut und es ist wichtig, damit man die Längen der einzelnen Stäbe miteinander vergleichen kann. Man kann dadurch Größenvergleiche zwischen den Zahlen machen. Dies geschieht, indem man die Stäbe, die für die Zahlen stehen miteinander vergleicht. So kann man z. B. feststellen, dass ein Stab für die Zahl 3 höher ist als ein Stab der für die Zahl 2 steht, dass also die Zahl 3 größer ist als die Zahl 2. Wenn man zwei Stäbe aneinanderlegt, z. B. einen Stab der 3. Stufe und einen Stab der 4. Stufe und daneben dann einen Stab der 7. Stufe legt, so stellt man fest, dass dieser genauso lang ist wie die beiden anderen Stäbe zusammen.

Mit Hilfe der Pluslandschaft kann man gut Mengen verdeutlichen, was ich für positiv halte. So kann man z. B. für die Zahl 4 vier Stufen gehen und diese 4 Stäbe dann aus der Pluslandschaft herausnehmen. Nimmt man jetzt noch eine weitere Menge von Stäben heraus, so ist es möglich die beiden Mengen miteinander zu vergleichen. So kann man für die Zahl 3 drei Stäbe herausnehmen. Man hat für die Zahl 4 mehr Stäbe, also eine größere Menge als bei der Zahl 3.

Kommen wir nun zum Rechnen mit der Pluslandschaft. Rechnen mit der Pluslandschaft bedeutet Figuren zu bewegen und sich so auf das Ergebnis hinzubewegen. Möchte man eine Additionsaufgabe lösen, so stellt man das Männchen zunächst auf Stufe 0. Es kann so alle Stufen hochblicken und eine Treppe in zwei Richtungen, links und rechts sehen. Man lässt nun das Männchen in eine Richtung die Stufen hochsteigen, es muss so viele Stufen erklimmen, wie der erste Summand angibt. Es ist egal, welche Richtung man hochgeht, man muss sich nur für eine entscheiden.

Auf der erreichten Stufe bleibt man dann kurz stehen und geht dann in die andere Richtung weiter. Wenn man zuvor links hochgegangen ist muss man das Männchen jetzt rechts gehen lassen und umgekehrt. Bei dem zweiten Teil des Weges lässt man das Männchen so viele Stufen hinaufsteigen, wie der 2. Summand der Additionsaufgabe angibt. Ist man so viele Stufen hinaufgeklettert, wie der 2. Summand angibt, so befindet sich das Männchen auf der Stufe, die das Ergebnis der Additionsaufgabe angibt. Das Ergebnis kann man bestimmen, indem man die Stufen abzählt, die das Männchen gegangen ist, oder man orientiert sich an Plättchen, die auf die einzelnen Stufen gelegt werden und angeben für welche Zahl welche Stufe steht. Das Abzählen und die Zahlenplättchen sind ganz nützlich, wenn man noch nicht so erfahren in dem Umgang mit dem Material ist. Durch diese Hilfsmittel können sich die Kinder daran gewöhnen, welche Stufe für welche Zahl steht. Die Kinder sollten sich aber so schnell wie möglich davon lösen, da die Zahlenplättchen oder auch farbige Markierungen der Pluslandschaft ein statisches Da-sein verleihen. Das statische Da-sein würde das prädikative Denken fördern und fordern, bei dem man sich immer an dem gleichen orientiert und Gemeinsamkeiten sucht. Dies soll hier nicht geschehen, denn durch die Pluslandschaft soll Funktionales Denken gefördert werden. Funktionales Denken bedeutet, dass man sich an dem orientiert, was sich ändert. Man schaut also nach Prozessabläufen, Bewegungen und Veränderungen. In der Pluslandschaft findet beim Erklimmen der Stufen Bewegung statt. Man kann in der Pluslandschaft eine Handlung selbsttätig ausführen und so das Ergebnis erzeugen. Beschreibt man den Lösungsweg einer Aufgabe, so verwendet man viele Worte die Dynamik ausdrücken, wie z. B. stellen, hochsteigen oder gehen.

Deshalb sollen sich die Kinder möglichst schnell daran gewöhnen, die einzelnen Stufen durch bloßes hinsehen den Zahlen zuzuordnen. Dies ist möglich, wenn man weiß, wie die Pluslandschaft aufgebaut ist und mit dem Material vertraut ist.

Kleinere Zahlen wie die 1, 2, 3, 4 lassen sich leicht in der Pluslandschaft bestimmen, da sie noch leicht und schnell durch die geordneten Strukturen zu erfassen sind. Ebenso sieht es aus mit den größeren Zahlen wie die 15, 16, 17 oder 18. Um die anderen Zahlen zu bestimmen, kann man sich an der 9 orientieren. Wir haben schon erfahren, dass die 9. Stufe aus den meisten gleich hohen Stäben besteht. Um zur 8 zu gelangen steigt man einfach eine Stufe hinab, um zur 7 zu gelangen zwei Stufen usw.. Um auf die Stufe zu gelangen, die für die 10 steht, kann man einfach von der 9 eine Stufe hochsteigen, zur 11 zwei Stufen usw..

Wenn man die einzelnen Stufen so bestimmen kann und nicht erst immer abzählen muss, werden die einzelnen Bewegungen des Männchens viel schneller vor sich gehen. Es ist auch wichtig, dass man nicht mehr alles abzählen muss, da das Abzählen zwar zu Beginn noch ganz hilfreich sein kann, es aber schnell unökonomisch und sehr zeitintensiv sein kann. Vor allem, wenn man sich in einen höheren Zahlenraum aufhält und z. B. bis zur Zahl 98 zählen muss. Deshalb ist es wichtig, dass die Kinder sich früh von dem zählenden Rechnen lösen und zum denkenden Rechnen übergehen. Da das zählende Rechnen schnell unökonomisch wird, ist eine Ablösung unumgänglich. Außerdem ist das zählende Rechnen eine Behinderung für das denkende Rechnen. Beim denkenden Rechnen sind die Schüler in der Lage Rechenoperationen durchzuführen, ohne dass sie abzählen müssen. Sie können für die Situation angemessene, geschickte und individuelle Lösungswege finden. Nur so sind die Kinder dann auch in der Lage über die Strukturen der Pluslandschaft hinauszudenken und sie in höhere Zahlenräume auszuweiten und dann in ihrer Vorstellung auch in diesen Zahlenräumen Rechenoperationen durchzuführen. Dadurch, dass die Kinder bei der Arbeit

mit der Pluslandschaft lernen, wie sie die Sprünge auf die einzelnen Türme machen können, ist die Pluslandschaft gut zur Förderung des denkenden Rechnens. Dies ist ein Vorteil der Pluslandschaft.
Als nächstes werde ich einige Aufgaben angeben. Bei diesen Aufgaben habe ich festgestellt, dass es viele Wege gibt, mit denen man auf das Ergebnis einer Aufgabe kommt. Die Pluslandschaft ist wie ein Berg, der über unterschiedliche Pfade erklommen werden kann. Dabei sind aber einige Pfade schwerer und anstrengender zu gehen und andere sind einfacher und auch schneller.
Ich finde es gut, dass man auf unterschiedlichen Wegen zum Ziel gelangen kann, denn laut dem radikalen Konstruktivismus denkt jeder Mensch anders und so kann jeder seinen eigenen Lösungsweg finden. Das was der eine für sich als bequemen und einfachen Lösungsweg zurechtlegt, kann für den anderen unbequem und schwer nachvollziehbar sein. Die Ideen des radikalen Konstruktivismus sind, dass es keine für den Menschen objektive Wahrheit gibt und dass sich jeder seine Vorstellung selber konstruiert und dabei an seinem vorherigen Wissen anknüpft. Deshalb kann es auch nicht nur einen richtigen und besten Weg geben, da jeder andere Vorerfahrungen und Vorstellungen hat. Jeder muss individuell entscheiden, welche Lösungswege er wählt.
Als erstes habe ich eine Additionsaufgabe bearbeitet: 8 + 4 (siehe Bild 1). Zuerst habe ich das Männchen einen Sprung von der Stufe 0 die rechte Treppe hinauf zur 8. Stufe machen lassen. Ich kann diesen Sprung machen, da ich mich an der 9 orientiere und das Männchen einfach eine Stufe niedriger als die 9. Stufe stelle.
Als nächstes setze ich das Männchen von der 9. Stufe auf der linken Treppe vier Stufen weiter nach oben, um den 2. Summanden der Aufgabe darzustellen. Dort lasse ich das Männchen stehen, denn ich bin bereits beim Ergebnis angelangt. Das Ergebnis kann ich jetzt folgendermaßen ablesen: ich zähle ab der 9. Stufe weiter aufwärts, bis ich bei der Stufe angelangt bin, auf der das Männchen steht. Das Ergebnis der Aufgabe lautet 8 + 4 = 12. Man kann bei dieser Aufgabe z. B. auch zuerst den linken Weg nehmen und dann für den 2. Summanden rechts gehen. Man gelangt dann auf einem anderen Stab als ich bei meinem ersten Lösungsweg angelangt bin, aber man steht auf derselben Stufe, erhält also dasselbe Ergebnis, nämlich 12.
Es besteht aber auch die Möglichkeit, das Männchen z. B. erst auf die 9. Stufe zu stellen und dann vier Stufen weiter für den 2. Summanden zu gehen. Danach geht man noch eine Stufe runter, da man ja bei dem 1. Summanden eine Stufe zuviel hochgegangen ist. Oder man geht

für den 2. Summanden direkt nur drei Stufen hoch, weil man die eine Stufe, die man beim 1. Summanden ja schon zuviel hochgegangen ist.
Schon an diesen vier Lösungsbeispielen sieht man, dass es viele verschiedene Lösungswege gibt. Man kommt teilweise auch auf verschiedenen Stäben am Ende des Weges an, aber man erhält doch immer dasselbe Ergebnis, da man immer auf dieselbe Stufe gelangt.
Es ist ein Vorteil, dass man bei der Arbeit mit der Pluslandschaft erkennen kann, dass bei der Addition durch einen Prozess etwas zum 1. Summanden dazukommt. Für die Darstellung des 2. Summanden geht man in eine andere Richtung, wodurch man ihn vom 1. Summanden gut unterscheiden kann, und man steigt immer weiter in die Höhe. So steht das Männchen beim Ergebnis auf einer höheren Stufe, als wenn es nur den 1. oder 2. Summanden für sich alleine hochgeht.
Als nächstes habe ich eine Subtraktionsaufgabe gewählt. Die Aufgabe lautet: 13 – 6 (siehe Bild 2). Um das Ergebnis herauszufinden habe ich das Männchen zuerst auf die 13. Stufe gestellt. Auch hierbei habe ich mich an der 9. Stufe orientiert und habe es vier Stufen höher gestellt. Ich habe das Männchen auf den Stab ganz rechts außen von der 13. Stufe platziert, hätte es aber auch auf jeden anderen Stab der Stufe stellen können. Ich habe nun zwei Richtungen, in die ich das Männchen bewegen kann, die linke oder die rechte Treppe hinab. Ich wähle den linken Weg und steige dann mit dem Männchen 6 Stufen hinab. Um das Ergebnis zu bestimmen orientiere ich mich wieder an der 9. Stufe und sehe, dass das Männchen zwei Stufen tiefer steht, also auf der 7. Stufe. Die Lösung der Aufgabe lautet also: 13 – 6 = 7.
Man kann, um den Subtrahenden darzustellen, aber auch den rechten Weg wählen. Hierbei kann man die 6 auch in 4 und 2 aufteilen, so dass man erst auf die 9. Stufe springt und dann noch zwei Stufen weiter runter geht.
Als nächstes habe ich die Kategorie `Folgen finden` gewählt. Auf den Fotos habe ich eine Zweierfolge dargestellt (siehe Bild 3). Man kann in der Pluslandschaft gut Folgen darstellen. Die am einfachsten zu entdeckende Folge, so empfinde ich es zumindest, ist die Zweierfolge. Dazu kann man das Männchen, wenn es bei der Stufe 0 anfängt, den diagonalen Weg hinaufsteigen lassen. Von der Null gelangt man dann direkt zur2, von da auf die 4, dann auf die 6, 8, 10, 12, 14, 16 und zuletzt auf die 18. So kann man ganz schnell Sprünge machen. Wenn man dann eine Viererfolge, Sechserfolge oder Achterfolge darstellt, kann man denselben diagonalen Weg nehmen, nur dass man diesmal größere Sprünge macht. Je größer die Folge ist, desto größer sind die Sprünge. So sind die Sprünge bei der Viererfolge größer als die der Zweierfolge. Man kann auch noch weitere Zusammenhänge zischen den Folgen

herausfinden. So kann man feststellen, dass man bei der Viererfolge doppelt so große Sprünge macht wie bei der Zweierfolge, da man hier immer eine Stufe überspringen kann, die man bei der Zweierfolge noch abgehen muss.

Wenn man mit der Zweierfolge vertraut ist, kann man bei der vorausgegangenen Additions- und der Subtraktionsaufgabe auch wie folgt vorgehen. Bei der Additionsaufgabe kann man für den ersten Summanden die Diagonale direkt auf die 8. Stufe springen, oder man könnte die Zweierfolge durchgehen, bis man zu der 8. Stufe gelangt. Um den 2. Summanden darzustellen kann man noch zwei Stufen auf der Diagonalen hochspringen und endet dann auch auf der 12. Stufe.

Bei der Subtraktion kann man, wenn das Männchen auf der 13. Stufe steht, diagonal drei Stufen hinabspringen. So gelangt man auch auf das Ergebnis, nämlich auf der 7. Stufe.

Man kann aber auch andere Folgen in der Pluslandschaft finden, so z. B. die Dreierfolge. Dabei kann man z. B. erst eine Stufe nach rechts hoch gehen und dann die Diagonale. Man könnte aber auch erst diagonal gehen und dann eine Stufe links hoch. Wenn man etwas geübter ist, als ich es bin, wird man die Sprünge der Dreierfolge auch direkt ohne diese Hilfssprünge absolvieren können.

Durch die Folgen und die damit verbundenen Sprünge entsteht eine gute Überleitung zur Multiplikation. Wenn man seine Sprünge zählt, also wie viele Stufen man berührt hat, bis man zu einer bestimmten Stufe gelangt ist, so ist man der Multiplikation schon sehr nahe. So kann man z. B. sagen, dass man fünf Zweiersprünge gemacht hat, was man dann in der Mathematik als $5 * 2 = 10$ notiert.

Als letzte Aufgabe habe ich eine Ergänzungsaufgabe gewählt. Sie lautet $6 + x = 14$ (siehe Bild 4). Bei dieser Aufgabe habe ich das Männchen zuerst auf die 6. Stufe gestellt, wobei ich es drei Stufen unter der 9. Stufe gestellt habe. Jetzt kann ich das Männchen so weit hochgehen lassen, bis es auf der 14. Stufe ist und dabei direkt die Schritte zählen, die ich gemacht habe. Ich kann das Männchen aber auch erst die drei Stufen zur 9 springen lassen und dann noch die fünf Stufen bis zur 14 gehen. In beiden Fällen erhalte ich als Lösung $x = 8$. Bei einer Ergänzungsaufgabe wird man sehr dazu verleitet die einzelnen Stufen bis zum Ergebnis abzuzählen, was dann sehr zeitaufwendig sein kann.

An diesen Aufgaben kann man sehen, dass man mit der Pluslandschaft nicht nur Additionsaufgaben lösen kann, sondern auch Möglichkeiten für z. B. Multiplikations-aufgaben, Bestimmung von Folgen usw. hat. Dies finde ich sehr gut, denn so versteht man die Zusammenhänge zwischen z. B. Multiplikation und Addition besser. So kann man z. B.

feststellen, dass 2 + 2 + 2 und 3 * 2 miteinander in Verbindung stehen, denn 2 + 2 + 2 sind drei Sprünge bei der Zweierfolge, also 3 * 2 Sprünge.

Außerdem finde ich es gut, dass es immer mehrere Lösungswege gibt. Wenn man nicht immer nur denselben Weg nimmt, sondern einfach mal austestet, welche Wege man zu einer Aufgabe sonst noch verwenden kann, so wird man viel sicherer bei den Bewegungen in der Pluslandschaft, also auch beim Rechnen. Man kann falsche Wege besser erkennen, da man das Ergebnis mit den Ergebnissen anderer Lösungswege vergleichen kann. Man kann auch mal andere, schwierigere Wege einschlagen, bei denen man dann vielleicht sogar entdeckt, das sie am Ende doch einfacher oder schneller sind.

Was ich auch ganz gut finde ist, dass man, wenn man sicher beim Umgang mit der Pluslandschaft ist, den Zahlenraum erweitern kann. So könnte man sich gut vorstellen, wie die Pluslandschaft größer wird und mit jeder Zahl wächst. Man muss die Stufen gedanklich immer weiter gehen. So kann man sich auch gut verdeutlichen, dass es unendlich viele Zahlen gibt, da man ja immer noch eine Stufe weiter gehen kann, egal wie groß die Zahl und der zurückgelegte Weg schon ist.

Ein weiterer Vorteil der Pluslandschaft ist, dass der visuelle Sinn und der Tastsinn angesprochen werden. Man kann die Bewegungen sehen und die Figuren anfassen und durch Handbewegungen weiterstellen. Durch das Lernen mit mehreren Sinnen können sich die Kinder besser etwas merken und dadurch auch besser lernen.

Es gibt bei der Arbeit mit der Pluslandschaft nur wenige Nachteile, wie z. B. die Zahlenkärtchen, was man aber sogar leicht beseitigen kann, oder dass man teilweise zum Zählen verleitet wird. Es gibt aber sehr viele Vorteile, wie z. B. die Förderung des Funktionalen Denkens oder die gute Einführung des denkenden Rechnens. Zusammenfassend kann ich also sagen, dass ein Einsatz der Pluslandschaft durch ihre vielen Vorteile in den Grundschulen sehr empfehlenswert ist.

Anhang:

Plustabelle bis 9:

+		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3		3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4		4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5		5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6		6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7		7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8		8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9		9	10	11	12	13	14	15	16	17	18