Melanie Hindricks

Erstrechenschein

Die Pluslandschaft

Anfangs möchte ich meine Pluslandschaft (PL) vorstellen, die ich nach der Vorlage der PL aus dem Schulbuch „Ich mache das so! Wie machst du es? Das machen wir ab.“ von Urs Ruf und Peter Gallin[1] nachgebaut habe. Es handelt sich bei meiner PL um ein Schülermodell, da sie mit einer Grundfläche von 200x200 mm nicht zu groß für die Schüler und somit passend für den Schulgebrauch ist. Sie nimmt wenig Platz ein, was für die Schule, bzw. für das Klassenzimmer nicht uninteressant ist. Zu dieser PL gehören neben der Grundplatte 99 Kieferkanthölzer mit jeweils einem Querschnitt von ca. 20x20 mm. Sie haben unterschiedliche Abstufungen, die ich am besten mit der Plus-Tabelle, welche alle Aufgaben enthält, die man nach der ersten Klasse wissen sollte, erklären kann, auf die die PL basiert:

+		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
0		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
2		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
3		3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
4		4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
5		5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
6		6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
7		7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
8		8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	
9		9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
...												

Dabei ist zu sagen, dass die PL ohne die erste Spalte und erste Zeile existiert. Diese muss sich beim Lösen von Aufgaben gedacht werden. Ab der dritten Spalte und Zeile wird die PL wiedergespiegelt. Es handelt sich dabei um 100 gleichgroße Felder. Für jedes Feld steht bei der PL ein passender Turm, d.h. bei einem Zehner-Feld steht ein Zehner-Turm usw.. In meinem Modell der PL ist jeder Turm in Zentimetern doppelt so lang wie es die Zahl in der Plus-Tabelle besagt, d. h. auf einem Einer-Feld ist der Turm 2cm hoch, auf einem Zweier-Feld 4cm usw..

[1] Urs Ruf, Peter Gallin (1995), Ich mache das so! Wie machst du es? Das machen wir ab. Lehrmittelverlag des Kantons Zürich.

Daher haben die Kanthölzer eine Länge von 2cm (20 mm) bis 36cm (360 mm). Dieses habe ich aus praktischen Gründen so gewählt, da die Kinder den kleinsten, bzw. kürzesten Klotz mit einer Höhe von 2 cm besser greifen und damit umgehen können als mit einem Holzklotz, der nur einen Zentimeter hoch ist. Ebenso können die Kinder die jeweiligen Höhenunterschiede bei 2 cm-Stufen besser erkennen. Diese 99 Klötze stehen auf der Grundfläche auf ihre Positionen und bilden eine stufenförmige Turmlandschaft. Die Null wird an ihrer Position (s. Plus-Tabelle) durch die Grundfläche dargestellt. Daher werden auch nur 99 Kanthölzer benötigt. Rings um die Grundfläche sind Spanplattenwände angebracht, die die Kanthölzer daran hindern sollen, beim versehentlichen Anstoßen oder Wackeln der PL, was in der Klasse schnell der Fall sein kann, von der Grundplatte zu fallen. Zur weiteren Stabilisation musste ich Styropor an den hinteren Wänden befestigt, da die Kanthölzer aus dem Baumarkt nicht exakt die Maße 20x20 mm haben (PL siehe Bild 1). Als Hilfe beim Rechnen werden kleine Figuren eingesetzt, die die Kinder durch die PL wandern und springen lassen können. Sie stellen einzelne Zahlen, Aufgaben, Folgen usw. dar. Dieses wird in den nachfolgenden Aufgaben, die ich bearbeiten werde, deutlicher. Die Figuren sollten passend zu den einzelnen Klötzen sein, damit sie darauf sitzen, bzw. stehen können. Zu klein wäre auch nicht von Vorteil, da die Kinder sonst schlecht mit ihnen arbeiten können. Ich habe Playmobil-Figuren gewählt, die der Arbeit beiliegen.
Nun werde ich insgesamt sieben verschiedenartige Aufgaben vorstellen, die ich nach Kategorien geordnet habe. Dabei gehe ich immer davon aus, dass die PL so vor dem Schüler steht, dass die Spitze mit der Null auf den Schüler zeigt (s. auch Bilder). Bevor das Rechnen mit der PL beginnt, sollte man sich festlegen, in welcher Richtung man immer zuerst gehen möchte. Ich habe mich dafür entschieden, dass, wenn ich Stufen hinaufsteige, ich erst nach links und dann nach rechts gehe. Ich halte diese Reihenfolge für sinnvoll, da man auch von links nach rechts liest und schreibt. Es ist aber anzumerken, dass der umgekehrte Weg nicht falsch ist.
Die erste Kategorie bilden die Additionsaufgaben, wobei beide Summanden vorgegeben sind. Ich wähle dazu die Beispielaufgabe 2+6, die die Kinder mit der Hilfe der PL lösen sollen. Der Schüler nimmt dazu ein Männchen und stellt es auf die Null. Die Figur hat nun zwei Einerstufen vor sich, die in zwei Richtungen (links und rechts) nach oben führt. Der Schüler wählt mit dem Männchen (wie festgelegt) die linke Treppe und steigt zwei Stufen hoch. Dort setzt er die Figur ab (der erste Summand ist damit markiert) und nimmt eine zweite zur Hand. Der Schüler beginnt bei dem ersten Männchen auf dem Zweierturm mit dem zweiten Männchen nach rechts sechs Stufen zu steigen. So landet es auf dem Achterturm der Rechnung 2+6=8 (s. Bild 2). Das zweite Männchen steht für das Ergebnis. Jedoch kann man auch noch den zweiten Summanden ablesen, indem man die Differenz von dem Ergebnis und dem ersten Summanden

bildet. Dies ist eine Möglichkeit die richtige Lösung zu finden. Ebenso wäre der umgekehrte Weg richtig gewesen (erst rechts, dann links). Es gibt noch weitere Lösungsmöglichkeiten. Der Schüler könnte zum einem mit einem Männchen bei Null starten und nach links erst zwei abzählen und dann sechs. Dabei wechselt er nicht die Richtung, sondern hüpft am linken Rand der PL bis zur 8 hoch. Zum anderen kann der Schüler mit einem Männchen von der Null auf dem geraden Weg mit einem Sprung auf die zwei hüpfen und es dort absetzen. Nun hüpft eine zweite Figur von der zwei auf dem steilsten Weg (sprich gerader Weg (mit einem Schritt um zwei höher)) drei Zweiersprünge (=6) und landet auf der acht. Der Schüler hat dabei die Aufgabe 2+6 in 2+(2+2+2) zerlegt.

Zur zweiten Kategorie gehören die Subtraktionsaufgaben. Dazu habe ich das Beispiel 13-5 gewählt. Die erste Figur wird auf einen der sechs 13er-Türme gestellt. Dies kann der sein, der am rechten Rand steht. Nun kann der Schüler mit einem zweiten Männchen fünf Stufen am Rand hinuntersteigen und landet bei der Acht. Eine weitere Möglichkeit ist, dass der Schüler erst wieder eine Figur auf die äußerste 13 stellt und dann überlegt, wie weit er von der Neun entfernt ist, die sich in der rechten Spitze (Ecke) der PL befindet, denn die Neunertürme ziehen sich von dort bis in die linke Spitze der PL durch. Sie sind in der PL am häufigsten vertreten, insgesamt zehn Mal. Die Neuner in den Spitzen dienen daher als Orientierungshilfe. Er zählt von der Neun hoch bis zur 13 und stellt fest, dass vier dazwischen liegen. Also stellt er das zweite Männchen erst auf die Neun. Jetzt muss er noch eine Stufe hinunter, da er fünf von der 13 abziehen soll. So hat der Schüler die Aufgabe 13-5 in 13-(4+1) zerlegt. Die Aufgabe kann aber auch von jedem beliebigen 13er-Turm, der nicht am Rand steht, gelöst werden, indem dort eine Figur abgesetzt und mit einer anderen Figur fünf Stufen nach links oder rechts hinunter gegangen wird (s. Bild 3). Beim Stufenabstieg ist für mich die rechte Richtung sinnvoller, da so wieder die Schreib- und Leserichtung (Anfang: links, Ende: rechts) eingehalten wird.

In der dritten Kategorie fallen Ergänzungsaufgaben, bei denen der erste Summand und das Ergebnis vorgegeben sind. Mein Beispiel dazu ist 9+x=17. Die erste Figur wandert von der Null direkt auf die Neun, wenn der Schüler weiß, dass die Neun in der linken Spitze ist. Wenn dies nicht der Fall ist, steigt das Männchen die neun Stufen einzeln hoch. Das zweite Männchen wird auf die 17er-Ebene (also auf einen von den beiden 17er- Türme) gesetzt. Nun kann der Schüler die Aufgabe so lösen, dass er mit der Neuner-Figur bis zum 17er-Männchen wandert und dabei die einzelnen Stufen zählt. Das Ergebnis ist acht (s. Bild 4). Eine weitere Möglichkeit könnte sein, dass der Schüler mit der ersten Figur über die Neuner-Ebene wandert und von dort aus so lange probiert, bis er über den steilen Weg direkt zur 17 kommt. Er wird am fünften und sechsten Neunerturm von links erfolgreich sein. Dafür sind jeweils vier Zweiersprünge nötig.

Der Schüler erhält für x 2+2+2+2 und somit eine Acht. Er hat dabei die Aufgabe 9+8=17 gelöst. Der Weg ist zwar etwas länger und komplizierter, aber er führt zum Erfolg und dazu, dass der Schüler sich intensiver mit der PL beschäftigt. Der Schüler kann aber auch das erste Männchen auf die Neun setzen und das zweite auf die 17. Er rechnet mit der ersten Figur erst bis zum Zehner, dann weiter bis zur 17. Dabei entsteht die Aufgabe 9+(1+7)=17, also 9+8=17. Es kann auch mit einer freundlichen (auswendig könnenden) Aufgabe gelöst werden wie 9+9=18. Der Schüler wird wissen, dass 18 eine Stufe höher ist als 17. Also muss er nicht neun Stufen hoch springen, sondern acht. Damit hat er die Lösung.
Bei der nächsten Kategorie soll eine Aufgabe gelöst werden, bei der nur das Ergebnis vorgegeben ist. Es soll also heraus gefunden werde, wie viele Aufgaben es gibt, mit denen man auf der Ebene (oder Höhenweg) der Siebenertürme landet. Daraus ergibt sich die Aufgabe x+y=7. Ein Männchen wird auf die Siebenerebene gestellt. Der Schüler lässt als erstes das zweite Männchen von der Null an so viele Stufen nach links hochgehen, bis es bei der Siebenerebene angekommen ist. Das sind sieben Stufen. Somit hat er die erste Aufgabe 7+0=7. Um die zweite zu bekommen, bleibt das erst Männchen auf der Ebene, während das zweite nun wieder links hochgeht. Jetzt muss jedoch der zweite Siebenerturm erreicht werden. Dazu geht er nur sechs nach links und einen nach rechts. Man erhält die Aufgabe 6+1=7 (bei Bild 5 wird 5+2 dargestellt). Dieses Verfahren (1. Summand: -1, 2. Summand: +1) wird so lange fortgesetzt, bis der am rechten Rand stehende Siebenerturm erreicht wird. Der Schüler erhält dabei insgesamt acht Aufgaben, die auf der Siebenerebene enden.
Die fünfte Kategorie ist das Finden von Nachbarschaftsaufgaben. Dazu nehme ich die Aufgabe 2+6, die in der ersten Kategorie schon berechnet wurde: 2+6=8. Das Ergebnis 8 hat an jeder Seite einen Nachbarn, also vier an den Seiten und vier weitere an den Ecken. Daraus ergibt sich, dass jedes Ergebnis acht Nachbarn hat. Somit entstehen aus der Aufgabe 2+6=8 acht weitere Aufgaben. Der Nachbar 6 setzt sich aus der Aufgabe 1+5 zusammen, die zwei 7er aus 2+5 und 1+6, die beiden 8er aus 3+5 und 1+7, die zwei 9er aus 3+6 und 2+7, sowie die 10 aus 3+7 (s. Bild 6 (Nachbarschaftsergebnisse habe ich mit schwarzen Lego-Männchen angedeutet)). Diese Aufgabenstellung ist sinnvoll, wenn es sich bei der Anfangsaufgabe (hier:2+6=8) um eine störrische, d.h. schwierig zu behaltenden Aufgabe handelt. Unter den Nachbarschaftsaufgaben könnte eine freundliche Aufgabe sein, an der sich der Schüler beim nächsten Mal orientieren kann. Auf freundliche Aufgaben komme ich später zurück.
Eine weitere Kategorie ist das Zerlegen von Zahlen. Hierbei sind den Schülern keine Grenzen gesetzt. Sie können nach ihren eigenen Interessen und Vorlieben die Zahlen zerlegen, z.B. die

11 in 2, 4, 1, 3 und 1. Die einzelnen Schritte werden durch die Männchen angezeigt. Dabei entstehen Aufgaben wie hier: 2+4+1+3+1=11.

Die letzte Kategorie, die ich bearbeitet habe, ist die der Folgen. Um die Zweierfolge zu bekommen, könnte der Schüler beginnend bei Null immer zwei Stufen nach links steigen. Jedoch muss er anfangs sie immer zählen. Schneller und einfacher geht es über den steilsten Weg, den man in einer Turmlandschaft einschlagen kann. Dabei wird eine Figur auf die Null gesetzt, während ein zweites Männchen von Null aus startet und auf geraden Wegen auf die Zwei hüpft, d.h. mit einem Sprung zwei Stufen (also +2). Wiederholt man dieses mit einer weiteren Figur, entsteht die Zweierfolge mit 0, 2, 4, 6, 8, usw. (s. Bild 7). Jede Zahl in einer Folge sollte durch ein Männchen dargestellt sein, damit man diese im Nachhinein verfolgen kann. Daher bleiben die Figuren in meiner Erklärung sitzen. Es können auf der PL alle Folgen meist auf verschiedene Wege gefunden werden. Die Viererfolge z.B. kann aus der Zweierfolge gebildet werden, nur dass aus zwei Zweiersprünge ein Viersprung wird (Viererfolge:0, 4, 8, 12, 16, usw.) Die Fünferfolge kann ermittelt werden, indem ein Männchen auf der Null sitzt und ein anderes von Null aus erst zwei steile Sprünge (je +2 (also 4)) macht und dann noch eine Stufe (+1) hochklettert. Es landet dabei auf die Fünf. Wiederholt der Schüler mit einer weiteren Figur diese Sprünge und hält dabei die Reihenfolge ein, wird die Fünferfolge dargestellt: 0, 5, 10, 15, usw..

Die PL wird von Grundschulkindern als eine Rechenhilfe benutzt, mit der sie Aufgaben veranschaulichen können. Wie man an meinen Beispielen erkennen kann, ist PL nicht nur für die Addition tauglich, sondern auch andere Rechenoperationen wie z.B. Subtraktion oder Folgen sind damit möglich. Bei der Einführung mit der PL können als Orientierungshilfe Kärtchen mit Zahlen auf die Türme gelegt werde, damit deutlich wird, welche Ebene für welche Zahl steht. Später wird davon abgeraten, da die PL sonst statisch angesehen werden kann. Aus diesem Grunde ist sie auch nicht farbig.

Das Zentrale bei der PL ist das dynamische Herumwandern. Mit jeder Rechnung wird längs und quer über die Landschaft gewandert, bis das richtige Ergebnis erreicht wird. Die Schüler erfahren so, dass es viele Wege zum Ziel gibt. Dabei werden bequeme Wege, aber auch Umwege genommen, die ebenso hilfreich sind. So lernen die Kinder die Landschaft besser kennen und wer sie besser kennt, entwickelt noch größere Motivation mit ihr zu rechnen. Durch die entstehende Dynamik (das Herumwandern in der Landschaft) wird die funktionale Denkweise der Kinder gut gefördert.

Auch die prädikative Denkweise kann bei der PL in Anspruch genommen werde. Die Schüler können die einzelnen Holzklötze miteinander vergleichen und überprüfen, wie viele Dreier-

Türme zusammen genauso lang sind wie ein Neuner-Turm. Es kann also auch nach gleichem gesucht werden. Aus diesem Grund sind die Klötze auch nicht auf der Grundplatte befestigt. Weiter ist positiv zu vermerken, dass die Schüler so sich selbst kontrollieren können. Sie können z.B. bei einer Additionsaufgabe die beiden Klötze der Summanden herausnehmen und sie zusammen mit dem Klotz ihres Ergebnisses vergleichen. Stimmt die Länge überein, haben sie richtig gerechnet. Wenn nicht, können sie es ein weiteres Mal versuchen.

Sogenannte Zaubertürme erleichtern und sichern das Lösen von Rechnungen. Jeder Schüler hat unterschiedliche Zaubertürme. Sie entstehen aus freundlichen Rechnungen. Das sind die Aufgaben, die der Schüler auswendig kann. In den dritten Kategorie (Ergänzungsaufgaben) habe ich ein Beispiel für eine freundliche Aufgabe gegeben: 9+9=18. Fällt dem Schüler z.B. die Aufgabe 9+7 schwer, kann er die freundliche Aufgabe nehmen und sie so umwandeln, dass sie ihm hilft. Er weiß, dass 9+9 gleich 18 ist. Also stellt er das Männchen auf den Zauberturm (mit der 18) und steigt damit zwei Stufen herunter auf die 16. Somit hat der Schüler seine störrische Aufgabe 9+7=16 gelöst. Solche Zaubertürme erleichtern erheblich das Rechnen und der Spaßfaktor steigt.

Durch die PL können die Schüler, z.B. durch die Zaubertürme zum Umformen motiviert werden, damit sie im Umgang damit beweglicher werden. Es gibt oft nur eine Lösung zu einer Aufgabe, aber es gibt nicht nur einen Weg zu einer Lösung, sondern die PL bietet viele Lösungswege an, wie man aus meinen Aufgaben herauslesen kann. Hierhinter verbirgt sich auch ein großer Vorteil der PL. Die Kinder werden nicht zu einer Lösung gezwungen, sondern können sich ihren eigenen Lösungswege suchen. So werden starke Schüler nicht unterfordert und schwache nicht überfordert. Es ist jedoch wichtig, dass die Schüler ihre Vorgehensweisen begründen können, denn so kann die Lehrerkraft überprüfen, ob der Schüler die Aufgabe wirklich verstanden hat. Ebenso ist es mit den Rechentagebücher, in denen die Schüler ihre Gedanken zu einer Aufgabe auch aufschreiben. Es hört sich so an, als würden die Schüler nur für sich lernen, aber in Rechenkonferenzen werden die Lösungswege auch untereinander ausgetauscht. Die Schüler lernen also auch voneinander. Es ist jedoch so, dass das Wissen nicht direkt von einer Person zur nächsten übertragen werden kann. Dies macht der Radikale Konstruktivismus deutlich. Das Wissen und die Erkenntnis über Sachverhalte muss jeder für sich selbst erarbeiten. Deshalb ist es auch so wichtig, dass mehrere Lösungswege bei der PL möglich sind, da die Schülern unterschiedlichen Gedankengänge nachgehen. Der Weg kann individuell entschieden werden.

Es wird anfangs für die Schüler schwer sein, dass richtige Ergebnis auf der PL zu bestimmen. Sie werden auf das zählende Rechnen zurückgreifen, welches hinderlich für das Rechnen in höheren Zahlenräumen ist. Dieser Nachteil der PL kann jedoch am Anfang durch die erwähnten Zahlenkärtchen auf den Türmen umgegangen werden. Die Kärtchen sollten entfernt werden, wenn die Schüler mit der PL vertraut sind. Auch später können die Aufgaben noch zählend gelöst werden, was jedoch nach kurzer Zeit unangenehm wird. Durch Hilfs-mittel wie die Zaubertürme werden die Kinder das denkende Rechnen schnell für sich entdecken.

Bei der PL existiert keine Unterstruktur wie die „Kraft der Fünf“ oder „Kraft der Zehn“. Hier kann sich der Schüler jedoch schon allein durch die Optik an der Neun orientieren, da die Neunerebene sich mittig von der linken bis zur rechten Spitze zieht.

Mit der PL wird neben dem Tastsinn der Schüler ihr visueller Sinn angesprochen. Das hat zum Vorteil, dass die Schüler sich das Gelernte besser einprägen können, da sie es mit den Augen und den Fingern/Händen aufgenommen und verinnerlicht haben. Sie versetzen ihre Figuren selbst und erkennen dabei, dass ein Prozess abläuft, den sie mit ihren Augen wahrnehmen.

Das Mengenverständnis wird mit der PL nicht sehr deutlich, da die Türme nicht aus einzelnen Einer-Türmen bestehen (z.B. der 13er-Turm besteht nicht aus 13 einzelnen Einerklötzen, sondern aus einem 13er-Holzklotz). Alle Türme (vom Einer-Turm bis zum 18er-Turm) bestehen aus einem Holzklotz. Es kann daher schlecht erkannt werden, welcher Turm welche Menge darstellen soll. Zu erkennen ist jedoch, dass mit jeder größeren Zahl der Turm um einen Einer wächst. Je größer die Zahl, desto höher der Turm. Die Schüler können so erkennen, dass jede Zahl ihren festen Platz in der Zahlenreihe hat.

Ein weiterer Vorteil der Pluslandschaft ist, dass sie in Gedanken mit dem größer werdenden Zahlenraum immer weiter aufgebaut werden kann. Auch negative Zahlen könnten damit dargestellt werden. Dazu müssten die Türme nur in die Tiefe gehen.

Weiter ist positiv zu vermerken, dass bei der Addition mit der PL zu erkennen ist, dass etwas dazu kommt. Der Schüler kann dieses im Laufe der Aufgabe erkennen, da die Figuren immer höher steigen, bis sie beim richtigen Ergebnis sind. ´Höher steigen´ symbolisiert das Hinzukommen.

Um den Schülern den Einstieg in die Welt der Textaufgaben zu vereinfachen, bietet sich die PL bestens an. Die Schüler können sich gegenseitig Mathematikgeschichten erzählen, die Aufgaben enthalten. Der Umgang mit Textaufgaben wird ihnen dadurch leichter fallen.

Durch die PL werden die Schüler spielerisch an verschiedenen Rechenoperationen herangeführt, wobei viele Lösungswege erlaubt sind. Die PL geht so auf jeden Schülertyp ein, wobei die Förderungen derer nicht zu kurz kommt (wie funktionales Denken, denkendes Rechnen, Einführung von Textaufgaben usw.).