



CREAMS

## KREATIVE MATHEMATIK IN DER SCHULE

### EINSATZ VON IDEEN UND METHODEN DER KOGNITIVEN MATHEMATIK

#### O. AKRONYM

CREAMS: Creative Mathematics at School / Kreative Mathematik in der Schule

#### I. FORSCHUNGSNAHE SCHULE – SCHULNAHE FORSCHUNG

Ideen und Methoden der Kognitiven Mathematik sollen eingesetzt werden, um das mathematische Verständnis und mathematisch-kreative Denken von Schülern der Primarstufe gezielt zu fördern. Dazu werden sich engagierte Lehrer unter wissenschaftlicher Anleitung mit aktuellen Forschungsfragen auseinandersetzen und praxisorientierte Forscher in unmittelbarer Diskussion mit diesen Lehrern und ihren Unterrichtsergebnissen treten.

#### II. VERBUND-PARTNER

##### II.1 SHANGHAI

Leitung: Huang Jian Hong  
Experimentier-Basiseinheit des Shanghaier Lehrerfortbildungszentrums

Beteiligte Schulen: Ming Qiang Schule; Schulleiterin: Wu Guo Li  
Xin Guang Schule; Schulleiter: Li Guang Hua  
Song Jian Schule; Schulleitung

## II.II OSNABRÜCK

Leitung: Prof. Dr. Inge Schwank  
Institut für Kognitive Mathematik, Fachbereich Mathematik/Informatik,  
Universität Osnabrück & Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik e.V.

## III. PROJEKT-PLAN

Das ehrgeizige Ziel, Kinder zum mathematisch-kreativen Denken führen zu wollen, erfordert besondere Maßnahmen über längere Zeiträume hinweg. Im Mittelpunkt stehen Unterrichtsprozess-Analysen, die den Weg zu einer dem kreativen Denken förderlichen Unterrichtskultur ebnet sowie die intensive Auseinandersetzung mit dem Wechselspiel zwischen Aufgabengestaltung und dadurch in Gang gesetzten kognitiven Aktivitäten.

### UNTERRICHTSPROZESS-ANALYSE

Datenerfassungsmethode: Videografie  
[dazu teilweise Transkription des Geschehens zur Erleichterung der Auswertung]

Auswertung: Anwendung eines Beurteilungsbogens, der die Aktivitäten der Lehrkraft und der Kinder in einer Klasse erfasst  
[z.B. Aktionen der Lehrkraft (frontal / interaktiv), Aktionen der Kinder (mit der Lehrkraft / untereinander), Argumentationsebene (Anwendung von Faktenwissen / eigenständige inhaltliche bzw. vorgehensbezogene Überlegungen), Wirksamwerden von unterschiedlichen Ausdrucksformen (enaktiv- / ikonisch-materialbezogen bzw. abstrakt - formal)]

Weiterentwicklung des eigenen Unterrichtsstils: Diskussion der Auswertungsergebnisse zunächst in Kleingruppen (2-3 Lehrkräfte), dann Vorstellung weiterführender Ideen im Plenum; schließlich Erprobung des verbesserten Unterrichtsstils mit einem erneuten Durchgang der Unterrichtsprozess-Analyse.

### MATHEMATISCHES DENKEN

Die Entwicklung mathematisch-kreativen Denkens bedarf einer besonderen Aufgabekultur. Mathematisches Faktenwissen und Routinen, die unverzichtbar für das Erschließen komplexerer mathematischer Zusammenhänge sind, lassen sich noch relativ einfach unterrichten. Sempel gesprochen, müssen z.B. in der Arithmetik nur genügend viele Aufgaben genügend oft "gerechnet" werden. Je weiter die Automatisierung voran schreitet, desto mehr sind lediglich *Gedächtnisleistungen* zu erbringen, aber nicht mehr die mit kreativem Denken verbundenen höheren kognitiven Leistungen. Die Gefahr besteht, dass ein solches *Hochleistungs-Potential* erst gar nicht aufgebaut wird bzw. in seiner Ungebrauchtheit verkümmert.

Mathematische Kreativität muss sich messen an einer Vielfalt in der Vorstellungs- und Darstellungsform von mathematischen Sachverhalten sowie einer daran geknüpften Begründungsfähigkeit für die innewohnenden Wirkzusammenhänge. Mathematisch-inhaltlich betrachtet, ist im Primarschulbereich der Aufbau eines adäquaten Zahlraumverständnisses, das auf

der Einsicht in die vielfältige Erreichbarkeit von Zahlen auf dem Zahlenstrahl (bzw. zunächst von Materialisierungen dieser Idee) beruht, von zentraler Bedeutung. Um ein solches Zahlraumverständnis zu erreichen, ist eine Förderung im funktional-logischen Denken unverzichtbar. Die Kunst ist, den Kindern Aufgaben – oder besser formuliert: Aufträge – zu geben, die eine geeignete kognitive Herausforderung darstellen.

Entwicklung von Aufträgen: Ausgehend von den Inhalten des normalen Mathematikunterrichts werden von den Lehrerinnen und Lehrern der CREAMS-Schulen Aufträge entwickelt, mittels derer höhere kognitive Aktivitäten in besonderer Weise angestossen und ausgeübt werden können.

Diskussion der Aufträge: Die Aufträge sowie die Analyse des zu erwartenden Nutzens werden den Verbund-Partnern zur Diskussion gestellt. Es folgt eine Überarbeitung der Aufträge und vertiefte Reflexion der während einer Bearbeitung involvierten kognitiven Mechanismen.

Erprobung der Aufträge: Der Einsatz der Aufträge im Unterrichtsalltag wird über einen längeren Zeitraum hinweg erprobt (mindestens ein halbes Jahr, da es um langfristige Effekte geht). Zur Untersuchung der Entwicklung ihrer kognitiven Fähigkeiten werden den Kindern im Klassenverband zu Beginn, in der Mitte und am Ende des Erprobungszeitraums Test-Aufträge gestellt. Einzelne Kinder bearbeiten die Aufträge im videografierten Einzelunterricht, damit ihnen gezielt solche Fragen gestellt werden können, die ihre kognitiven Vorgehensweisen in besonderer Weise überprüfbar machen.

Weiterentwicklung von Aufträgen:

Die Ergebnisse aus der Erprobung der Aufträge werden zunächst in Kleingruppen (2-3 Lehrkräfte) diskutiert, schließlich erfolgt eine Vorstellung daraus resultierender, weiterführender Ideen im Plenum. Die Erkenntnisse werden genutzt für die Überarbeitung bestehender Aufträge wie auch für die Entwicklung neuer Aufträge. Mit dem so entstehenden Auftragspaket wird eine neue, verbesserte Erprobungsrunde gestartet.

## AUSTAUSCH

Die gemeinsame Arbeit erfordert einen regen Austausch an Materialien. Dies kann über das Internet erfolgen. Darüber hinaus sind in regelmäßigen Abständen Besuche vor Ort notwendig und zwar sowohl in Shanghai als auch in Osnabrück. Wünschenswert ist, dass die Projektsprachen chinesisch und deutsch sind (der Umweg über die englische Sprache kann zur Alltagskommunikation benutzt werden, sollte aber nicht die Arbeit an den Unterrichtsanalysen und das diffizile Nachdenken an den Aufträgen belasten). Von Osnabrücker Seite ist denkbar, dass eine chinesische CREAMS-Lehrerin z.B. für ein Jahr nach Osnabrück kommt, um sich in Kognitive Mathematik einzuarbeiten und während dieser Zeit auch die anfallende Übersetzungen vornimmt. In Shanghai wäre von den Verbundpartnern das Übersetzungsproblem auch vor Ort zu lösen.

#### IV. ANHANG

Im Nachfolgenden werden zu den Aspekten "Darstellungsfähigkeit", "Begründungsfähigkeit" sowie "Zahlraumverständnis" beispielhaft Auftrags-Bearbeitungen solcher 8- bis 9-jähriger Kinder gezeigt, die sich bei der vom Osnabrücker Institut für Kognitive Mathematik jährlich durchgeführten Osnabrücker Mathe-Olympiade für Drittklässler als mathematisch besonders kreativ und leistungsstark erwiesen haben.

##### IV.1 DARSTELLUNGSFÄHIGKEIT

4

Pia und Tom sammeln zusammen Muscheln. Pia findet 26 Muscheln, Tom nur 12.

Wie viele Muscheln muss Pia an Tom abgeben, damit beide gleich viele Muscheln haben? \* 7

Wie viele Muscheln hat Tom dann? ~~12~~ 19

Überlege und male:

Pia:  Tom: 

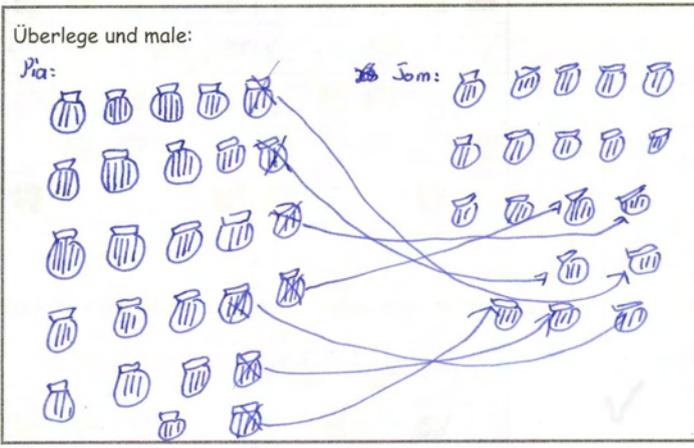


Abb. 1: Beispiel zur Darstellungsfähigkeit

Das Kind, das den Muschelverteilungs-Auftrag (Abb. 1) bearbeitet hat, kann sich keiner Routinen wie dem Aufstellen einer Gleichung bedienen; z.B.:  $M_{\text{Tom}} = 12 + 26 - (26 + 12) : 2$ . Gleichwohl gelingt es ihm, sich den Sachverhalt durch eine geschickte Ausnutzung der ikonischen Repräsentationsform zurecht zu legen. Ein solches eigenständiges Nutzen von Repräsentationsformen, hier der ikonischen, ist typisch für mathematisch-kreative Kinder. Zur Förderung sind den Kindern reichhaltige Ausdrucksformen für mathematische Ideen und Zusammenhänge zur Verfügung zu stellen und sie auch zu einem Wechsel zwischen den Ausdrucksformen anzuregen.

## IV.II BEGRÜNDUNGSFÄHIGKEIT

6 5 Brüder spielen mit Plättchen. Die Plättchen sind von einer Seite weiß und von der anderen Seite grau. Sie legen 5 Muster.

1) 2)

3) 4) 5)

Welches ihrer Muster passt am Besten zu diesem Bild 3

Begründe deine Antwort.  
*Weil die Plättchen die grau waren werden weiß und das selbe andersrum.  
 Und das hochkant Bild muss nach links gedreht werden.*

**Abb. 2:** Beispiel zur Begründungsfähigkeit

Das Kind, das den Plättchen-Anordnungs-Auftrag (Abb. 2) bearbeitet hat, ist sehr gut in der Lage, eine kompakte, klare und vollständige Begründung für seine Lösung anzugeben. Zur Förderung ihrer Begründungsfähigkeit sollen Kinder immer wieder angeregt werden, sich Gedanken über ihre Vorgehensweisen zu machen und diese Gedanken mit anderen Kindern und der Lehrkraft zu kommunizieren.

#### IV. III ZAHLRAUMVERSTÄNDNIS

7 In einer Rakete zum Mars fliegen 224 Reisende mit. Es sind 38 Erwachsene mehr als Mädchen und 6 Mädchen mehr als Jungen. Wie viele Jungen, Mädchen und Erwachsene reisen mit ?

Jungen: 58

Mädchen: 64

Erwachsene: 102



Hier ist Platz für deine Überlegungen.  
Rechne, zeichne oder schreibe etwas auf.

$(224 - 38 = 186)$

E	112	100	105	101	102
M	74	62	67	63	64
J	68	56	61	57	58

**Abb. 3:** Beispiel zum Zahlraumverständnis

Bei der Bearbeitung des Reisenden-Auftrags (Abb. 3) entwarf das Kind eine Tabelle mit verschiedenen Möglichkeiten für die Unterteilung der 224 Reisenden auf Erwachsene [E], Jungen [J] und Mädchen [M]. Von einer geeigneten Startzahl ausgehend (Gruppe der Erwachsenen bildet die Hälfte der Reisenden), die im weiteren Verlauf geschickt nachjustiert wurde, ermittelte es die sich ergebenden Verteilungen, bis es schließlich die gewünschte Summe erreichte. Auch ohne Formalisierungskennntnisse, sprich eine geeignete Gleichung aufstellen zu können, gelingt dem Kind so, die Zahlenzusammenhänge in den Griff zu bekommen. Zur Förderung des Zahlraumverständnisses sollen die Kinder von Beginn an mit solchen Materialien arbeiten, die das funktionale Denken unterstützen und immer wieder Aufträge bearbeiten, zu denen ihnen noch keine fertigen Routinen und Rezepte vorgelegt worden sind.

Osnabrück, 28. April 2006

Prof. Dr. Inge Schwank

Institut für Kognitive Mathematik,  
Fachbereich Mathematik/Informatik,  
Universität Osnabrück &  
Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik e.V.