Inge Schwank & Edyta Nowinska, Osnabrück

Zur Vorbereitung algebraischen Denkens

1. Einführung

Arithmetisches Denken [ArD] und algebraisches Denken [AlD] haben wir begonnen anhand von Aufgabenbearbeitungen zu untersuchen, die von zwei ganz unterschiedlichen Populationen stammen: a) Kinder der 3. Klasse, die an der Osnabrücker Zwergen-Mathe-Olympiade [ZMO] teilgenommen haben (2001-2006, n≈800); b) Studierende, die im Rahmen ihres Studiums für das Lehramt an Grund-, Haupt- und Realschulen mit dem Fach Mathematik Pflichtklausuren zum Schulstoff der Klassen 5 bis 6 bzw. 5 bis 8 bearbeitet haben (2002-2007, n=656). Die bisherigen Ergebnisse stimmen nachdenklich. Während viele der Kinder logisch-arithmetische Denkleistungen zeigen und die Besten unter ihnen auch ohne Schulalgebrakenntnisse schwierige Aufgaben lösen können, scheitern allzu viele Studierende, weil sie vom Potential mathematischer Zeichensysteme nur erreicht hat, dass schematisch zeichenmanipulativ vorgegangen werden kann und zwar blindlings. Diese achtlose Vorgehensweise zeigt sich sowohl in ihrer Bearbeitung arithmetischer wie auch algebraischer Aufgaben. Bei der Entwicklung des AlD sind nicht nur neue Denkformate zu neuen Inhalten zu erschließen, von besonderer Wichtigkeit ist, dass die Entwicklung des AlD einhergeht mit einer Schulung im Denken! Gelingt dies nicht – so zeigen die Aufgabenbearbeitungen – haben die Studierenden keinerlei Vorteil davon, dass sie das mächtige Werkzeug der Algebra-Formelsprache im Mathematikunterricht kennen gelernt, ihr Abitur erfolgreich bestanden und auch bereits einige Mathematik-Veranstaltungsstunden (Vorlesung, Übung, Tutorium) an der Universität besucht haben. In diesem Beitrag werden wir uns schwerpunktmäßig mit Aufgabenbearbeitungen von Studierenden auseinander setzen. Eine weitere, umfangreichere Veröffentlichung ist in Arbeit.

2. Zur Bearbeitung von "Arithmetik"- und "Algebra"-Aufgaben

Es zeigt sich, dass die elementaren Kenntnisse der Studierenden allzu häufig zu gering sind. Die Regeln für das Rechnen mit Klammerausdrücken, Assoziativ- und Distributivgesetz, Vorzeichen, Bruchzahlen, Variablen, Termen, Gleichungen etc. sind nur in Form von fragmentarischem Wissen mit begrenzten Zugriffsmöglichkeiten vorhanden. Spuren metakognitiver Aktivitäten sind so gut wie nicht auszumachen. Tatsächlich sind die einfachen "Arithmetik"-Aufgaben ein guter Indikator für den in einer Schulstoffklausur insgesamt erzielten Erfolg. Z.B. im Falle einer "Arithmetik"-Aufgabe aus Klausur K11 beträgt die Korrelation zwischen dem Erfolg bei ihrer Bearbeitung und dem Gesamterfolg bei der Bearbeitung der übrigen Klausuraufgaben 0,394 (Signifikanznieveau: 1%; Lösungshäufigkeit: 32,26%).

Auszüge aus typischen Studierenden-Bearbeitungen, Bereich "Arithmetik":

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{4}{6}+\frac{3}{6}$	$5\frac{1}{4}:7\frac{1}{8}=\frac{5}{4}:\frac{7}{8}$	$5\frac{1}{4}:7\frac{1}{8}=\frac{21}{4}:\frac{57}{8}=5,1:6,1$
$\frac{1}{4}:\frac{1}{2}=\frac{4}{1}\cdot\frac{1}{2}$	$-\left(\frac{1}{4}:\frac{1}{2}\right)=\frac{-1\cdot -2}{4\cdot 1}=\frac{2}{4}$	$\frac{5}{9}\cdot 2\frac{1}{4}=2\frac{5}{36}$; $\quad 2\frac{3}{6}:2\frac{5}{36}=\frac{108}{30}$

Auszüge aus typischen Studierenden-Bearbeitungen, Bereich "Algebra":

$y = x+12$ $y^2 = x^2+12$	$x^2 = 480 \quad \vert\sqrt{\ }$ $x = 240$	$0,16t^2 = 2\cdot(0,16t)$	$0,001s$ $-0,16t$ $\overline{9,84ts}$

3. Zur Bearbeitung von Textaufgaben

Beispiel-Aufgabe aus Klausur K14.

Überprüfe, ob folgende Aussage wahr oder falsch ist, und beweise bzw. widerlege sie.

Das Produkt von zwei aufeinander folgenden geraden natürlichen Zahlen ist um 1 kleiner als das Quadrat der dazwischen liegenden natürlichen Zahl.

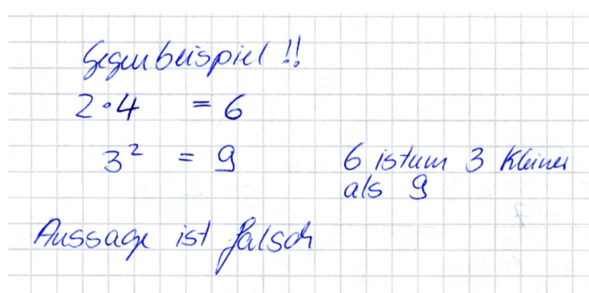

Abbildung 1: K14 S34

An Klausur K14 haben 46 Studierende teilgnommen; 43 haben die Aufgabe bearbeitet.

7 widerlegen die Aussage: 5 geben mit konkreten Zahlen ein Gegenbeispiel an (Abb. 1), 2 arbeiten mit einer fehlerhafte Formalisierung.

25 rechnen ein paar Zahlenbeispiele korrekt durch: 6 schließen aus dem Zutreffen der Aussage für ihre Zahlenbeispiele, dass die Aussage wohl richtig ist (Abb. 2). 9 verzichten auf jegliche Schlussfolgerung oder weitere Analysen. 5 scheitern am Versuch einer anschliessenden Formalisierung. 5 gelingt die Formalisierung komplett und sie kommen zum korrekten Schluss.

11 geben unmittelbar eine Formalisierung an: 2 von ihnen beweisen die Aussage aber dennoch im weiteren anhand von Beispielen. Immerhin 9 gelingt es, ihre Formalisierung auch zur Beweisführung erfolgreich zu nutzen. Um einen besseren Überblick über das Vorgehen der Studierenden zu gewinnen, haben wir ein *Kategoriensystem zur Klassifizierung von Bearbeitungsweisen* entwickelt. Die übergeordneten Hauptkategorien in diesem System sind: I. Formalisierungsansatz fehlt, II. Formalisierungsansatz falsch, III. Formalisierungsansatz (i.W.) korrekt. Bei der hier vorgestellten Textaufgabe fehlt bei der Hälfte der Studierenden jeglicher Formalisierungsansatz, nur einem knappen Drittel gelingt ein brauchbarer Formalisierungsansatz. Gehört ein Studierender der Gruppe I oder II an, kommt also mit der Formalisierung nicht zurecht, liegt sein Gesamtergebnis unter 50% der erreichbaren Gesamtpunktzahl (Abb. 3). Der Bearbeitungserfolg bei dieser Aufgabe ist ein guter Indikator für den Gesamt-Bearbeitungserfolg bei allen anderen Klausuraufgaben. Es zeigt sich mit 0,566 eine deutliche Korrelation (Signifikanzniveau: 1%).

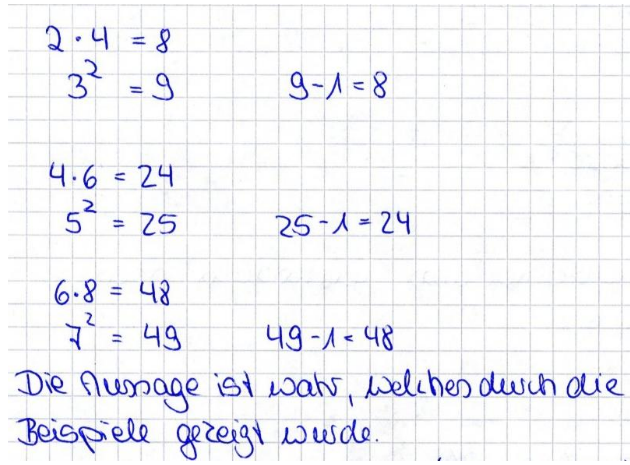

Abbildung 2: K14 S12

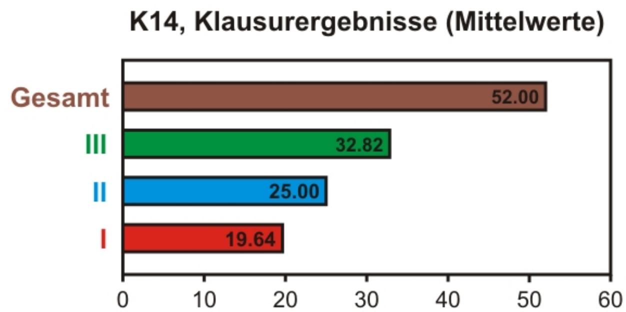

Abbildung 3: K14 Klausurergebnisse

Beispiel-Aufgabe aus Klausur K18 bzw. ZMO.

Im Zirkus Knobelix sitzen 224 Zuschauer. Es sind 38 Erwachsene mehr als Jungen und 6 Jungen mehr als Mädchen. Wie viele Mädchen, Jungen und Erwachsene sitzen auf den Zuschauerbänken?

Hier wollen wir speziell folgende Fragestellung anreißen: Welchen Nutzen bietet die erlebte gymnasiale Schulmathematik Studierenden beim Bearbeiten von Aufgaben dieser Art, die auch von mathematisch begabten 8-jährigen Kindern gelöst werden können? Man könnte auch so fragen: Was bringt AlD im Alter von 8 Jahren im Vergleich zum – prinzipiell möglichen – ArD im Alter von über 18 Jahren?

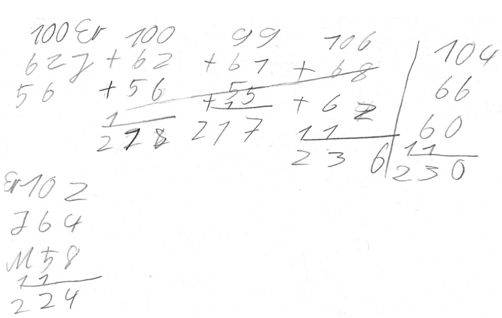

Abbildung 4: ZMO Drittklässler

Betrachten wir zunächst die Vorgehensweise eines ZMO-Drittklässlers. Von einer geeigneten Startzahl ausgehend, die nachjustiert wird, ermittelt der Schüler die sich ergebenden Verteilungen, bis er die gewünschte Summe 224 erreicht (Abb. 4). Auch ohne Formalisierungskenntnisse, sprich in diesem Fall eine geeignete Gleichung aufstellen zu können, gelingt es dem Drittklässler das Beziehungsgeflecht der Zahlen logisch korrekt in den Griff zu bekommen.

Eine analoge Aufgabe, bei der es um Tiere statt um Zuschauer geht, haben wir unseren Studierenden gestellt. Betrachten wir nun beispielhaft die Bearbeitungsweisen zweier Studierender.

Ein Studierender rechnet eher Unsinn, stellt eine merkwürdige Gleichung auf und gibt auf: er hat x Hühner, 6 mal mehr Schweine als Hühner und 38 mal mehr Kühe als Hühner (Abb. 5). Ein anderer Studierender kommt auf einen Formalisierungsansatz, weiß aber nicht weiter (Abb. 6) Man könnte das so verstehen: bezogen auf die Schweine (x) hat er 38 Kühe mehr und 6 Hühner weniger. Jetzt fehlen ihm noch die Schweine selbst. Wie bekommt man das hin? Es sind 6 mehr als die Hühner. Diese und ähnliche Aufgaben werden von ungefähr der Hälfte der Studierenden gelöst, bei den mathematisch begabten Kindern entscheidet der Bearbeitungserfolg bei solchen Aufgaben über einen Rang auf den vordersten Plätzen.

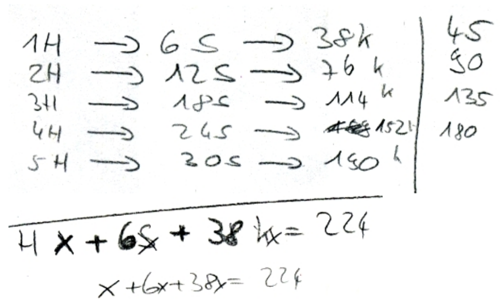

Abbildung 5: K18 S07

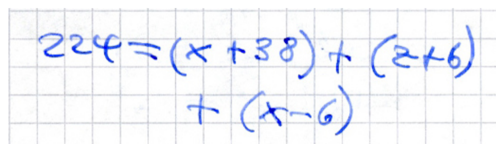

Abbildung 6: K18 S05

4. Fazit

Mathematik zu betreiben vorkommt allzu oft zu einer sinnarmen Schreibtätigkeit. Die Formel, diese großartige neuzeitliche wissenschaftliche Errungenschaft erweist sich dann als Fluch. Statt in Richtung geistige Höhenflüge zu führen, ebnet sie diametral den Weg zur Entwicklung geistiger Schwäche.

Ein Abiturient bringt die Art seines Zugangs zum Bearbeiten mathematischer Probleme wie folgt auf den Punkt: *Ich kann nicht denken, ich kann nur rechnen*. Wir wissen von ihm, dass er Mathematik-Grundkurse besucht hat, es dort immerhin auf 9 Punkte brachte und sein Abitur mit der Note 1,9 bestand.

Die beste Vorbereitung für die Entwicklung algebraischen Denkens wäre ein Grundschulmathematikunterricht, der reichhaltige Denkanlässe bietet.