erschienen in: Peter-Koop, A. & Bikner-Ahsbahs, A. (Hrsg., 2007): mathematische bildung - mathematische leistung, 233 - 248. Hildesheim: Franzbecker.

Kategorisierung von Diskursen im Mathematikunterricht bezüglich metakognitiver und diskursiver Anteile

von

Elmar Cohors-Fresenborg und Christa Kaune, Osnabrück

Zusammenfassung: In der internationalen Diskussion wurde in den letzten 15 Jahren verstärkt diskutiert, Metakognition zu einem zentralen Bestandteil des Mathematikunterrichts zu machen. In diesem Aufsatz stellen wir zunächst ein Kategoriensystem mit den Kategorien „Planung“, „Monitoring“, „Reflexion“ und „Diskursivität“ vor, um metakognitive Aktivitäten beim schrittweise kontrollierten Argumentieren im Mathematikunterricht zu klassifizieren. Dieses theoretische Werkzeug wird danach zur Analyse einer Unterrichtsszene benutzt. In der Diskussion über die Frage: „ $0,\overline{9} = 1$?“ spielen externe und interne Repräsentationen und der Unterschied zwischen dem Gesagten und Gemeinten eine große Rolle.

1 Einleitung

Die internationale Diskussion darüber, wie das Lernen von Mathematik verbessert werden kann, hat in den letzten 10 Jahren verstärkt das Augenmerk auf die metakognitiven Aktivitäten der Lernenden gerichtet. Schon Polya hatte in seinen Aufsätzen und Büchern (z.B. POLYA 1949) die Ergebnisse seiner eigenen Introspektion beim mathematischen Problemlösen zur Handlungsanweisung für nützliche kognitive Aktivitäten von Lernenden verarbeitet, die heute in der Psychologie unter dem Begriff „Metakognition“ subsumiert werden. Seine Schriften wurden zum Ausgangspunkt vieler mathematikdidaktischer Ansätze zur Verbesserung der mathematischen Problemlöse-Kompetenz von Lernenden. Sie haben aber auch die mathematikdidaktische Forschung über Metakognition angeregt (vgl. z.B. SCHOENFELD 1992). Auf dem Gebiet der pädagogischen Psychologie hat BOEKAERTS (1996, 1999) herausgearbeitet, welche Rolle Metakognition beim selbstregulierten Lernen spielt.

Im Gefolge der Tradition, dass die Analyse metakognitiver Aktivitäten von Lernenden durchgeführt wird, wenn diese sich um die Lösung eines mathematischen Problems bemühen (DECORTE et al. 2000, KRAMARSKI; MEVARECH 2003), wird eine wichtige Komponente von Metakognition im *Planen* von Problemlöseschritten, verbunden mit der Wahl von geeigneten mathematischen Werkzeugen, gesehen. Darüber hinaus hat im Prozess des Problemlösens der Einsatz dieser Werkzeuge kontrolliert zu werden, es muss eine Überwachung des Sach- und Zielbezuges durchgeführt werden sowie ein Abgleich zwischen den gesetzten Zielen und dem schon Erreichten. Diese Tätigkeit des Kontrollierens und Überwachens wird *Monitoring* genannt. Während Monitoring eher im Verlauf des Problemlöseprozesses praktiziert wird, ist davon eine geistige Tätigkeit zu unterscheiden, die auf (Zwischen-) Ergebnissen aufsetzt. Diese wird *Reflexion* genannt. Gegenstand der Reflexion können sowohl gestellte Probleme als auch das Verständnis von Begriffen sein. Auf die Bedeutung von Reflexion beim Lernen und Verstehen von Mathematik hat schon KILPATRICK (1986) hingewiesen.

In unserem von der DFG geförderten Projekt (Co96/5-1) „Analyse von Unterrichtssituationen zur Einübung von Reflexion und Metakognition im gymnasialen Mathematikunterricht der SI“ haben wir detailliert Mechanismen untersucht, welche metakognitive Aktivitäten von Lernenden befördern können (COHORS-FRESENBORG; KAUNE 2003a). Ein Schwerpunkt hat dabei in der Analyse von Diskussionen im Mathematikunterricht gelegen. In diesen Diskussionen ging es in besonderer Weise um das Verstehen von Begriffen, den verständigen und begründeten Gebrauch algebraischer Werkzeuge, das Erfinden von Definitionen und Beweisen sowie deren Verständnis. Weitere Gegenstände der Diskussionen waren die Beurteilung der Adäquatheit von gewählten Repräsentationen, von mathematischen Ideen oder die Analyse des Zusammenspiels von Darstellungen und dahinter liegenden Vorstellungen, sowohl eigener als auch der von Mitschülern.

Ein tieferes Verständnis von Begriffen, eingeschlagenen Vorgehensweisen und benutzten Werkzeugen ist nur möglich, wenn sich *Monitoring* und *Reflexion* präzise auf das beziehen, was zur Debatte steht. Zur Präzision beim Lesen (bzw. Aufschreiben) mathematischen Wissens und beim Zuhören (bzw. Argumentieren) in einer Diskussion im Mathematikunterricht gehört wesentlich die Fähigkeit, den Unterschied zwischen Dargestelltem (Gesagtem, Geschriebenem, Gezeichnetem) und Intendiertem erfassen, thematisieren und ausdrücken zu können, aber auch die Fähigkeit zum komplexen Argumentieren (schriftlich und mündlich) bei der Herausarbeitung mathematisch relevanter Ideen, sowohl im innermathematischen Kontext als auch bei der mathematischen Modellierung. Dazu ist wesentlich die Fähigkeit, Argumentationsstränge (z.B. auch beim Beweisen) zu verfolgen, die Tragfähigkeit von Argumenten einzuschätzen und Zweifel sowie Gegenargumente strategisch adäquat platzieren zu können. Wir haben diese Kompetenzen unter dem Begriff *diskursive Kompetenz* subsummiert. Diskursivität ist für eine Unterrichtskultur zentral, die die metakognitiven Aktivitäten der Lernenden fördern soll (COHORS-FRESENBORG; KAUNE 2003b). Zu dieser gehört eine Vorbildfunktion der Lehrkraft durch eigenes kompetentes Tun, auf Kompetenzsteigerung ausgerichtete Interaktionen und eine emotionale Beeinflussung des Wertesystems der Lernenden.

Ein Ergebnis unseres Projektes ist die Konstruktion und Evaluation eines Kategoriensystems, mit dem sowohl metakognitive als auch diskursive Aktivitäten der

Lernenden erhoben werden können als auch die Förderung von dazu nützlichen Kompetenzen durch die Lehrkräfte (COHORS-FRESENBORG; KAUNE 2005).

2 Kategoriensystem

Um das Kategoriensystem überschaubar zu halten, wurde bei seiner Entwicklung von solchen Unterrichtsgesprächen ausgegangen, die analoge Vorgehensweisen enthalten. Ausgangspunkt war Mathematikunterricht, der mit dem Begriff Schulalgebra umschrieben werden kann. Unter „Schulalgebra" subsumieren wir Teilgebiete der Mathematik, die sich mit mathematischen Notationen, Rechnen, Termumformungen und Gleichungslösen beschäftigen. Eine Gemeinsamkeit besteht darin, dass die einzelnen Schritte durch Regeln zu rechtfertigen sind. In ihrer präzisen Form sind sie symbolisch notiert. Ein Unterrichtsgespräch kann also sowohl davon handeln, die Zulässigkeit von Umformungen zu analysieren oder zu begründen, als auch von der Wahl spezieller Bezeichnungen. Es kann um Fehler oder Fehlvorstellungen gehen, aber auch der Unterschied zwischen dem Gesagten (oder Geschriebenen) und dem Gemeinten kann Gegenstand eines Unterrichtsgespräches sein.

Von einem etwas abstrakteren Standpunkt geht es darum, schrittweise kontrollierbare mathematische Tätigkeiten zu analysieren und die mit ihnen zusammenhängenden metakognitiven Aktivitäten zu klassifizieren. Unter diese abstraktere Sicht fallen dann auch Beweise, wenn ihnen ein abgegrenztes System von Definitionen und Sätzen zu Grunde liegt, die beim Beweisen benutzt werden dürfen. Bei diesem System muss es sich nicht um ein Axiomensystem handeln, es können auch sogenannte Rechengesetze sein.

Das vorgelegte Kategoriensystem eignet sich deshalb nicht nur zur Klassifizierung von Mathematikunterricht, der sich sachlich mit Schulalgebra beschäftigt, sondern auch mit Analysis, Linearer Algebra oder Wahrscheinlichkeitsrechnung, in dem schrittweise kontrolliertes Argumentieren eine Rolle spielt. Zugleich ist das Kategoriensystem so offen, dass Mathematikstunden vom ersten Schuljahr bis zu den Leistungskursen der gymnasialen Oberstufe kategorisiert werden können.

Im Kategoriensystem sind die Kategorien *Planung*, *Monitoring*, *Reflexion* und *Diskursivität* in Unterkategorien dekomponiert und einige von diesen auch noch einmal nach interessanten Teilaspekten aufgeschlüsselt. Bei jeder wird festgestellt, ob die entsprechende Aktivität von einem Lernenden oder Lehrenden ausgeführt wird. Mit dieser Entscheidung ist es möglich, metakognitive oder diskursive Aktivitäten von Lernenden und Lehrenden mit einem gemeinsamen Kategoriensystem zu klassifizieren.

Im Kategoriensystem ist den Kategorien Planung, Monitoring, Reflexion und Diskursivität jeweils eine Farbe zugeordnet worden. In den analysierten Transkripten werden zunächst die Textpassagen (Sätze, aber auch Teilsätze bis hin zu einzelnen

Worten) identifiziert, denen eine Kategorie zugewiesen werden soll. Danach werden diejenigen Teile, die einer Kategorie zugeordnet werden, in der entsprechenden Farbe gefärbt. Diese Darstellung gibt bei qualitativen Analysen eine optische Unterstützung, gerade auch bei Kategorienwechseln. Insbesondere bei Vergleichen fallen Unterschiede in der Unterrichtskultur stärker auf. So wird die Suche nach relevanten Textstellen erleichtert und die Hypothesenbildung gefördert.

Zur Erleichterung einer rechnergestützten Auswertung sind für die Kategorien Planung, Monitoring, Reflexion und Diskursivität mit ihren Unterkategorien und Teilaspekten Kurzbezeichnungen eingeführt worden. Diese bestehen aus einem Wort aus bis zu vier Zeichen, eventuell mit einem zusätzlichen Präfix oder Postfix.

Das erste Zeichen ist der Anfangsbuchstabe des Namens der Kategorie.

Das zweite Zeichen ist „S“ für eine Aktivität einer Schülerin oder eines Schülers und „L“ für die Aktivität einer Lehrkraft.

Das dritte Zeichen ist eine Ziffer als Bezeichnung für eine Unterkategorie.

Das vierte Zeichen ist ein kleiner lateinischer Buchstabe zur Kennzeichnung von Teilaspekten der Unterkategorie.

Wenn für eine Unterkategorie (oder ein Teilaspekt davon) klassifiziert werden soll, dass die entsprechende Aktivität gefordert oder angeregt wird, dann wird die entsprechende Klassifikation mit dem Zusatz „Forderung nach“ gesetzt und bei der Kurzbezeichnung der Klassifikation *f* als Präfix gesetzt. Wenn für eine Aktivität eine Begründung oder eine Erläuterung gegeben wird, dann wird vor die entsprechende Kurzbezeichnung der Klassifikation *b* als Präfix gesetzt.

In den Transkripten werden in der rechten Spalte die Kurzbezeichnungen für die zugeordneten Kategorien auf Höhe der entsprechenden Textstelle angegeben.

Bei einigen Äußerungen kommt es vor, dass einzelne Worte oder Satzteile einer anderen Kategorie zuzuordnen sind als der umgebende Text. Die Zuweisung einer anderen Kategorie zu dieser lokalen Textstelle bewirkt natürlich eine andere Färbung. Im Spezialfall, dass sich Unterschiede innerhalb einer globalen Kategorie, z.B. Monitoring, ergeben, lässt sich keine andere Farbe nehmen. In diesem Fall wird der Text und auch die entsprechende Kurzbezeichnung zur besseren Abgrenzung **fett** gedruckt.

Zur leichteren Auffindung von Äußerungen einer Lehrkraft sind im klassifizierten Text deren Äußerungen <u>unterstrichen</u>. Das gilt auch für die entsprechenden Kurzbezeichnungen der Kategorien.

Die Zuweisung von Kategorien, ihren Unterkategorien und Teilaspekten richtet sich nach dem Format der Äußerung und nicht danach, ob die Intentionen oder Behauptungen zutreffen.

		Planung		Monitoring		Reflexion		Diskursivität
1	P1	Feststellen der **Ausgangslage**	M1	Kontrolle: **Rechnung prüfen**	R1	Reflexion über **Begriffe**	D1	**Einleitung** eines Diskurses
			M1a	lokal (evtl. Fehler finden)	R1a	Gegenstand / Sachverhalt einem Begriff zuordnen	D1a	Einladung zu einem „begrenzten" Diskurs (z.B. Frage nach Zustimmung / Vergewisserung)
			M1b	schrittweise (lückenlos) prüfen	R1b	Begriff in eine Begriffshierarchie einordnen	D1b	Einladung zu (Einleitung von) einem ausgedehnten Diskurs
			M1c	Kontrolle eines fiktiven Rechenschritts			D1c	... durch Aufdecken einer Diskrepanz zwischen Gesagtem und Gemeintem
							D1d	... zur Vermeidung einer Fehlvorstellung/ Verständnisdefizits
							D1e	..., um einen Sachverhalt allgemein darzustellen
							D1f	... zur Überprüfung einer Planung / eines Planungsschritts / Strategie
2	P2	Benennen einer Abfolge von **Werkzeug**anwendungen	M2	Kontrolle: (vermeintlichen) **Fehler** feststellen (bei Rechnung oder Umformung)	R2	**Methodenbewusstsein** (evtl. falsche) Anwendung / Benutzung mathematischer Werkzeuge kommentieren	D2	**Verankerung** eines Diskursbeitrages
	P2a	einschrittig	M2a	Nennung	R2a	im konkreten Fall Wirken eines allgemeinen Werkzeugs gesehen	D2a	Nennen von Bezugspunkten oder -personen
	P2b	mehrschrittig	M2b	Aufdecken eigener / fremder Fehlvorstellungen	R2b	verkettete Anwendung von Werkzeugen	D2b	absichtlicher (präziser) Bezug auf einen früheren Beitrag, nicht auf den unmittelbar voraus gehenden
	P2c	alternative Werkzeuganwendung(en) benennen	M2c	Aufdecken eigener / fremder grundsätzlicher oder häufig vorkommender Fehlvorstellungen	R2c	Erkannt, dass nach Werkzeuganwendung eine bessere Ausgangsposition für weitere Schritte erreicht ist	D2c	Sicherstellung der Gesprächsgrundlage / Verorten der folgenden oder vorhergehenden Äußerung
	P2d	wie a oder b oder c, um Fehlvorstellungen aufzudecken					D2d	Wiederholung des Gesagten als Grundlage der weiteren Argumentation
							D2e	Vergewissern über Gesagtes/Geschriebenes
							D2f	einen Beitrag von einem anderen (Teil-) Beitrag zeitnah absetzen
3	P3	Benennen einer Abfolge von zu erreichenden **Zwischenergebnissen**	M3	Kontrolle: **Terminologie** und **Notation**	R3	**Strukturanalyse** eines **Terms** / mathematischen **Ausdrucks**	D3	Diskursivität **mit sich selbst**
	P3a	einschrittig			R3a	ohne Berücksichtigung von Umformungen		
	P3b	mehrschrittig			R3b	unter Berücksichtigung von Umformungen		
	P3c	alternative Zwischenergebnisse benennen						
	P3d	wie a oder b oder c mit der Nennung von Anschlussstrategie						
4	P4	Planung einer **Darstellung** (Formel, Grafik, Term, Textstelle,etc.), um Einsicht zu befördern	M4	Kontrolle: **Argumentation**	R4	**Strukturanalyse** einer **Argumentation** / eines **Diskurses**	D4	**Erziehung** zum Diskurs
	P4a	Kennzeichnung / Markierung	M4a	lokal prüfen	R4a	Durchführen	D4a	Regeln des Diskurses offen legen / verabreden
	P4b	spezielle (Term)-Darstellung	M4b	mehrschrittig / global prüfen	R4b	Festellen eines falschen Bezuges oder Widerspruches	D4b	Einhaltung von Regeln des Diskurses
	P4c	Mikrowelt / Repräsentationsform	M4c	Fehler in der Argumentation aufdecken	R4c	Veränderung von Standpunkt, Wortwahl, Begriff, Argumentationsführung feststellen		
5	P5	Planung **metakogn. Aktivitäten**	M5	Positionsbestimmung: **Verständnisdefizit** nennen	R5	Bewusste Wahl einer **Darstellung** (Formel, Grafik, Term, Textstelle,etc.)	D5	**Negative** Diskursivität
	P5a	Monitoring organisieren	M5a	abgegrenzter Schritt	R5a	Kennzeichnung / Markierung	D5a	Wiederholung von bereits Gesagtem, ohne dass ein neuer Gesichtspunkt dazu kommt
	P5b	Reflexion organisieren	M5b	global	R5b	spezielle (Term)-Darstellung	D5b	Einbringen alternativer Behauptungen oder Vorschläge, ohne dass diese abgesetzt werden
	P5c	Diskurs organisieren			R5c	wie a oder b, um gezielt Einsicht zu befördern	D5c	Äußerungen / Fragen sind nicht erkennbar auf das Geschehen oder das Gesagte bezogen
					R5d	wie a oder b, um Abstraktionsprozesse anzuregen oder zu unterstützen	D5d	unkommentierter Wechsel von Bezugspunkt / Wortbedeutung
					R5e	wie a oder b, um Metakognition anzuregen	D5e	inadäquate Wortwahl zur Beschreibung oder Kommentierung
							D5f	keine Intervention gegen gravierenden Verstoß der Regeln eines Diskurses ergriffen
							D5g	Suggestivfrage stellen
6			M6	Positionsbestimmung: **Planungsdefizit** nennen	R6	**Reflektierende Einschätzung / Bewertung**		
			M6a	nächster Schritt bzw. nächste Schritte	R6a	(eigenes) Vorgehen , (Zwischen-)bilanz ziehen		
			M6b	global	R6b	(eigene) Stärken, Schwächen, Fehler, Fehlvorstellungen		
					R6c	wichtige Stellen, Ideen, allgemeine Schwierigkeiten		
7			M7	Überwachung des **Sach- und Zielbezuges**	R7	Zusammenspiel zwischen **Darstellung** und **(Fehl-) Vorstellung** thematisieren		
8			M8	**Selbstüberwachung**				
			M8a	eigene Rechnung				
			M8b	Ausdruck oder Terminologie				
			M8c	Argumentation				

3 Analyse eines Transkripts

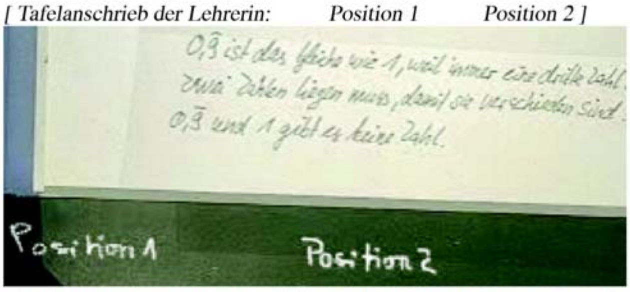
Die Anwendung des Analysewerkzeugs wird an einer Szene aus Klasse 9 (Gymnasium) zur Frage „$0,\overline{9} = 1$?“ vorgeführt. Als Hausaufgabe war zu bearbeiten: „$0,\overline{9} = 1$? Nimm Stellung!“ Zu Beginn der Unterrichtsszene liegt auf dem Projektor eine Folie mit der Aussage von Peter:

> $0,\overline{9}$ ist das Gleiche wie 1, weil immer eine dritte Zahl zwischen zwei Zahlen liegen muss, damit sie verschieden sind. Zwischen $0,\overline{9}$ und 1 gibt es keine Zahl.

L.:	Jens.	
Jens:	Also ich finde, Peter gibt da doch ’ne ganz gute Antwort. Ähm, weil äh logisch ist es nicht wahr, aber er sagt ja, dass null Komma neun das Gleiche, nich, wie eins ist und dass da immer eine Zahl zwischen ... also dass eine Zahl mindestens zwischen zwei Dezimalzahlen liegen muss. **Und das ist in diesem Fall halt nicht so** und deshalb ist es logisch ja das so, dass das eigentlich stimmen müsste. *[Gemurmel]*	DS2a MS2a DS2d MS8b **MS4a** MS4b
L.:	(...) Antworten. Es sind Meldungen.	
Jens:	Bitte schön!	
Mona:	Also ich denke mal, da gibt es aber schon ’ne Zahl. Die ist zwar halt null Komma unendlich Null und dann ’ne Eins, also irgendwann mal *[lacht]*... *[Gemurmel]*	DS2f DS5d MS8b
L.:	Schreibst du’s mal eben an, wie du dir die vorstellst?	*f*RL5e
Mona:	Nee, das das ... so als Zahl gibt’s ... kann man nicht so aufschreiben. Aber, logisch wär das schon möglich. Weil, wenn man, wenn man jetzt ganz viele Periode neun hat, dann hinten ’ne Eins und das ist dann so als ... also...*[lacht]*. *[Gemurmel]* Also, das kann man als Zahl nicht so aufschreiben, aber logisch kann man sich das denken.	MS4c *b*RS7 *b*MS4c RS7
L.:	Mhm, ... Juli!	DL5f
Juli:	Aber, eigentlich kann man sich das logisch nicht denken ... *[Gelächter]*	DS2f
Juli:	... denn, denn unendlich ist auch unvorstellbar und man kann sich das also auch nicht irgendwie logisch vorstellen oder so. Weil, es ist halt einfach unendlich und diese 9, die geht immer und immer weiter, und wenn es immer weiter geht, dann kann auch nicht plötzlich ’ne 1 kommen.	*b*MS4c
L.:	Ähm, ich möchte gern noch mal wissen, ob denn allen überhaupt klar ist, was Mona sagen wollte, über welche Zahl sie da geredet hat. **Sie sagte dann ja: „Anschreiben kann ich sie doch nicht.“** *[6 sec.]* Jens	*f*DL2c **DL2d**
Jens:	Also, eben wie ich Mona verstanden hab’ soll ja *[lacht]* nach irgendeiner 9 ’ne 1 kommen, ja?	DS2e

Mona:	Nee.	
Jens:	Nein?	DS1d
Mona:	Also ich meinte, ähm, die Zahl, die man bräuchte, um aus null-Komma-Periode-neun eins zu machen. Über die habe ich geredet ...	DS2c
Jens:	Ach so.	
Mona:	... also, wenn erst ganz viele Nullen kommen und irgendwann mal 'ne Eins. Also, aber das gibt es ja im Prinzip nicht.	DS2c MS8c
Suse:	Das wollte ich auch sagen: Also, es gibt ja unendlich, unendlich viele Neunen hinter der Null, äh Periode Neun, ... und sie meint halt, dass sie, dass es irgendeine Zahl geben muss, die genauso viele Nullen, also unendlich Nullen haben muss, ... also am Ende dann 'ne Eins, so dass man das, wenn man das addiert, dass dann Eins rauskommt. Die Zahl sucht sie. Aber die kann man ja nicht aufschreiben, weil es ja unendlich viele Nullen sein müssten. *[8 sec.]*	DS2d MS8b DS2d *b*MS4c
L.:	Ja, sammeln wir vielleicht 'n bisschen weiter auf. Ihr hattet ja gesagt, zwei Positionen haben wir ...	DL5c

[Tafelanschrieb der Lehrerin: Position 1 Position 2]



	und Begründungen und Argumente dafür. So, wie können wir die beiden Positionen überhaupt beschreiben, das war ganz zu Anfang schon gesagt worden. Damit wir ein bisschen genauer noch sehen, wie man argumentiert und welche dieser Argumentationen erst mal einsichtig und dann auch vielleicht korrekt sind.	*b*DL1b
	[L. legt die beiden Folien noch einmal zurecht] [2 sec.]	
	Welche beiden waren das überhaupt, die ihr gesehen hattet, in den fünf Äußerungen?	*f*DL2c
	[10 sec.]	
	Die waren ja in der allerersten Äußerung dagewesen schon.	
	[2 sec.]	
	Was kann sein, mit den Zahlen?	
Suse:	Also, ähm, ich würde sagen Peters Lösung ist richtig, weil, wenn man, wenn man jetzt mal andere Zahlen dafür nimmt ...	*b*MS4b
	[Lehrerin ergänzt, während Suse spricht, das Gleichheitszeichen links im Tafelanschrieb unter Position 1: $0,\bar{9} = 1$ *]*	

Suse: ... anstatt null Komma Periode, Periode neun und eins dann jetzt zum Beispiel fünf und zwei nimmt, weiß man, dass die nicht gleich sind, weil da Drei zwischen steht. Und bei null Komma Periode neun und eins steht halt keine Zahl dazwischen. Man weiß, man kann halt keine Zahl aufschreiben. Mona meinte zwar, dass es diese 'null Komma unendlich null eins'-Zahl halt geben müsste, aber man kann sie nicht aufschreiben. Also gibt es eigentlich nicht wirklich eine Zahl. Und deswegen könnte das schon stimmen. Mona. DS2b DS5d *b*MS4c DS1a

Mona: Also ich meinte nur: die Zahl gibt' s nicht, aber man könnte sich das so logisch denken, *[Gelächter]* dass es sie geben könnte. So, also... *[Gemurmel]* ... **aber die Zahl gibt' s nicht. Äh, das ist klar.** *[Gemurmel]* **Es geht nicht.** DS2d RS7 **RS6a**
[Getuschel, Gesten von Judith und Juli.]

L.: Äußert ihr euch laut. Judith, Juli.

Juli: Ja, ich versuch mir gerade zusammen mit Judith die Zahl "null Komma Periode null eins" vorzustellen. Aber irgendwie ist das komisch. RS7 DS2b
[Die Lehrerin schreibt „0," und dreht sich dann zur Klasse um.]

L.: Sagst du es noch mal bitte.

Juli: Periode null eins.

[7 sec.]

L.: Juli, weiter. Bestimme, wie es weiter geht.

Juli: Mhm, ja. Du.

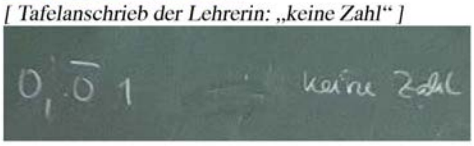
Jens: Ich glaube, dass nach Perioden nie 'ne weitere Zahl stehen darf. MS2b
[3 sec.]

L.: Suse.

Suse: Ja das stimmt, ja das stimmt ja, weil die Null, **ähm, weil der Periodenstrich da drüber steht,** heißt das ja, die Null wiederholt sich immer. Dann kann da nicht plötzlich 'ne Eins hinter stehen. *b*MS2b **MS8c** DS2c

Juli: Ja.

Suse: Also gibt es die Zahl nicht. RS6a
[Tafelanschrieb der Lehrerin: „keine Zahl"]



Suse: Wenn, müsste der Periodenstrich über beiden Zahlen stehen und dann würde das immer so weiter gehen: null Komma null eins null eins null eins. RS3a RS6a

Das wär' ja dann auch nicht die Zahl, die Mona meinte. DS2c

[Tafelanschrieb der Lehrerin:]

Jens beginnt seine Äußerung mit einem präzisen Bezug (DS2a) auf den Vorschlag von Peter. Im ersten Gedankengang (Z2/3) unterstellt er Peter einen Gedankenfehler, dies wird durch MS2a erfasst. In Z3/4 paraphrasiert er zunächst Peters Stellungnahme, bevor er dann weiter argumentiert (DS2d). Von anderer Art ist seine zweite Monitoring-Aktivität, hier korrigiert sich Jens selbst (Z4/5), er überwacht seine Äußerung und präzisiert sie (MS8b). Die lokale Prüfung (Z5/6) von Philips Argumentation (MS4a) mit einem Fazit schließt sich an. Sein Urteil (Z6/7) schließlich fasst eine mehrschrittige Argumentation zusammen (MS4b).

Die beiden folgenden Aktionen der Lehrerin und des Schülers dienen der Unterrichtsorganisation, sind nicht als metakognitiv einzustufen und werden deshalb auch nicht gefärbt.

Besonderes Augenmerk verdient Monas Beitrag: Mit den Worten: „Also ich denke mal, da gibt es schon ne Zahl ....“ (Z10) leitet sie einen Widerspruch ein. Sie macht deutlich, dass sie ihren Beitrag von dem von Jens absetzen will (DS2f). Um ihre Äußerungen zu bewerten ist es notwendig zu verstehen, was Jens sich unter „der Zahl“ vorstellt. In Z4/5 wird deutlich, dass es sich um eine „Zahl zwischen $0,\overline{9}$ und 1“ handelt. Anders Mona, sie wechselt die Bedeutung des Begriffs „der Zahl“ in ihrer Aussage. Ihre weiteren Beschreibungen (Z10/11) machen deutlich, dass es sich um die vermeintliche Differenz zwischen $0,\overline{9}$ und 1 handelt.

Die beiden Schüler reden von einer Zahl, meinen offensichtlich aber ganz unterschiedliche, und kein Mitschüler kritisiert dies. In dieser komplexen Situation reden die beiden aneinander vorbei. In gutem Unterricht muss nicht nur Präzision gefordert werden, sondern „Sünden gegen die Diskursivität“ sind negativ anzumerken. Deshalb wird dieser unkommentierte Wechsel der Wortbedeutung (Z10) als negative Diskursivität (DS5d) bezeichnet.

Die Aktion der Lehrerin (Z13) hat die syntaktische Form einer Frage, ist aber als Aufforderung zu verstehen. Es handelt sich um eine Aufforderung, eine Reflexionsphase einzuleiten (*f*RL5e).

In Monas zweiter Äußerung (Z14-18) redet sie plötzlich von „ganz viele Periode neun, dann hinten ’ne Eins“, obwohl sie in Z 10/11 von „null Komma unendlich Null und dann ’ne Eins“ gesprochen hat. Wir werten „Periode neun“ als Versprecher statt „Periode null“, und klassifizieren das bei ihr (verabredungsgemäß) nicht als negative Diskursivität. Trotzdem hat dieser Versprecher gravierende Konsequenzen für die Mitschüler, weil der Unterschied zwischen Gesagtem und Gemeintem keinem auffällt, aber die nächsten zwei Schüleräußerungen (Z24 und Z31/32) sich auf die von Mona zuletzt gesagte Schreibfigur und nicht auf das von ihr Gemeinte beziehen. Deshalb wird die Äußerung der Lehrerin (Z19), mit der sie die nächste Schülerin aufruft, als negative Diskursivität (DL5f) gewertet. Der Einwand, dass sie es gemerkt haben könnte und der Schülerin die Entdeckung überlassen wollte, ist nicht stichhaltig, da die Lehrerin auch in ihrer nächsten Äußerung in Z26ff nicht darauf eingeht. In Z26ff hat sie aber gemerkt, dass Maßnahmen ergriffen werden müssen, um die Gesprächsgrundlage wiederherzustellen. Dieses fordert sie ein (*f*DL2c).

Suses Beitrag ab Z40 verstehen wir als Wiedergabe des von Mona Gesagten (DS2d). In ihrem letzten Satz (Z44/45) begründet sie, warum in Monas Argumentation ein Fehler ist (*b*MS4c).

In Z47/48 unterbricht die Lehrerin die Debatte der Schüler, um diese vermeintlich zu strukturieren. Da sie aber keinerlei Bezug auf das Gesagte nimmt und auch dieses Herausspringen nicht anderweitig konstatiert und begründet, wird negative Diskursivität (DL5c) kategorisiert. Das von ihr nicht korrigierte Chaos zeigt sich auch darin, dass die Schülerinnen und Schüler auf ihre Interventionen zunächst nicht reagieren (Pausen in Z57, Z60, Z62).

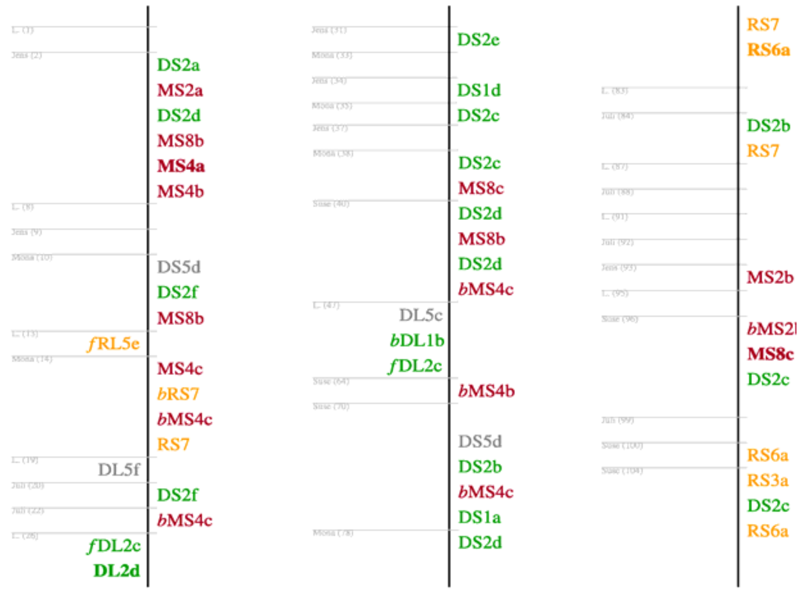
Als Reaktion auf die Intervention der Lehrerin, die mehrmals (Z53, Z61) auf die ersten Äußerungen verweist, springt Suse in Z64 auf die Ausgangslage (Peters Folie) zurück. Sie begründet ihre Zustimmung zu Peters Argumentation (*b*MS4b) durch eine Analogie (Z65-73), die sie aber nicht vollständig ausführt. Wir unterstellen ihr folgende Argumentation: *Wenn man 2 und 5 statt* $0,\overline{9}$ *und 1 nimmt, dann kennt man das Intervall und weiß, dass die Zahl 3 dazwischen steht (Z71/72). Deshalb hat das Intervall eine positive Länge.* Eine analoge Argumentation wird von ihr für $0,\overline{9}$ und 1 nicht präzise ausgeführt: Es wird zwar die Länge des Intervalls, das Mona meinte (Z35/36), durch Suse mit $0,\overline{0}1$ ausgerechnet (Z74), aber es wird nicht argumentiert, warum es eine Zahl darin geben muss, noch wird eine genau benannt. Mit einem Kennzeichnungsterm wird auf die Intervalllänge zugegriffen, „diese Zahl“ (Z74) aber als Namensersatz (für die benötigte Zahl dazwischen) genommen. Die unberechtigte Verwendung des Kennzeichnungsterms in Z74 wird als negative Diskursivität (DS5d) gewertet. Suse zitiert Mona korrekt, aber benutzt das Argument von Mona so falsch wie Mona selbst, d.h. sie deckt den Wechsel der Wortbedeutung nicht auf, obwohl Mona in Z35/36 noch einmal bekräftigt hatte, dass sie den Abstand meinte und nicht „die Zahl dazwischen“.

Monas anschließende Äußerung (Z77-80) ist ein beeindruckendes Zeichen für Reflexion über das eigene Vorgehen (RS6a) unter dem Eindruck eines kognitiven Konfliktes zwischen Darstellung und Vorstellung (RS7).

Mit der Äußerung von Juli (Z83) und der anschließenden Entscheidung der Lehrerin, das Gesagte aufzuschreiben, spitzt sich die Debatte zu. Der Zwang zur Darstellung deckt auf, dass vieles bisher Gesagte bloßes Gerede über vermeintliche „Zahlen“ war, dem aber der Bezug zu existierenden Gegenständen fehlte. Jens stellt sofort fest (Z92), dass diese Schreibfigur $0,\overline{0}1$ gegen Syntaxregeln beim Aufschreiben von periodischen Dezimalkommazahlen verstößt (MS2b). Suse bringt es (Z96) auf den Punkt (DS2d): Der Periodenstrich ist nicht damit verträglich, dass „plötzlich ’ne Eins hintersteht“ (*b*MS2b). Suse fasst diese Überlegungen zusammen (Z99) „Also gibt es die Zahl nicht“ (RS6a) und schließt als indirekten Beweis an, dass eine fast gleich aussehende Schreibfigur (nämlich $0,\overline{01}$) syntaktisch korrekt ist, deshalb eine Zahl darstellt, die aber nicht die „Zahl wär’, die Mona meinte“. Diesen Bezug auf syntaktische Strukturen haben wir mit RS3a klassifiziert. Gleichzeitig enthält diese Reflexion aber auch in Z105 mit „die Mona meinte“ eine Verortung auf eine vorangehende Äußerung (DS2c). Da die ganze Äußerung Reflexion darstellt, hielten wir es nicht für sinnvoll, den letzten Teil abzutrennen und grün zu färben. Wir haben uns entschieden, für solche Fälle eine Doppelkodierung vorzusehen und die zweite Kategorie durch in der Farbe passende Punktierung hervorzuheben. Ebenso hatten wir in Z83/84 durch Doppelkodierung (DS2b) gekennzeichnet, dass sich Juli in einer Reflexionsphase absichtlich auf einen früheren, und nicht den unmittelbar vorausgehenden Beitrag bezieht.

4 Auswertung

Nach vorstehender detaillierter Analyse und Kategorisierung wird als nächste Abstraktionsstufe der Ablauf des Unterrichtsgespräches bezüglich der gesetzten Kategorien als grafisches Profil dargestellt:



Jede graue Linie stellt den Beginn einer Äußerung (von Lehrkraft und Lernenden) dar, versehen mit Namen und Nummer der Transkriptzeile. Die farbigen Kurzbezeichnungen der klassifizierten Beiträge der Lehrkraft befinden sich links von der Achse, die der Lernenden rechts. Das grafische Profil gibt einen guten Überblick über das Wechselspiel zwischen Lehrer-Schüler- und Schüler-Schüler-Interaktionen im Unterrichtsgespräch.

In unserem Beispiel kann man dem grafischen Profil über den Unterrichtsausschnitt von 6 Minuten Dauer sofort entnehmen, dass in dieser Szene Planungsaktivitäten gar nicht auftreten. Dies zeigt das Fehlen von blau gefärbten Kurzbezeichnungen. Von den insgesamt 34 Äußerungen entfallen nur 10 auf die Lehrerin. Von diesen sind 4 bezüglich metakognitiver oder diskursiver Aktivitäten klassifiziert. Der entsprechende Anteil bei den Schüleräußerungen ist 17 von 24. Es fällt auf, dass zu Beginn Monitoring-Tätigkeiten überwiegen. Zunächst kontrollieren die Gesprächsteilnehmer das Gesagte, zunehmend findet auch Reflexion statt. Das Ganze funktioniert nur, weil alle Beteiligten sehr genau darauf achten, was gesagt wird und ob die folgenden Äußerungen sich darauf beziehen. Der hohe Anteil grüner Kurzbezeichnungen, gleichmäßig verteilt über alle Redebeiträge, visualisiert eine hohe diskursive Unterrichtskultur in der Lerngruppe.

Die präzise Erfassung des Auftretens der Kurzbezeichnungen ermöglicht eine quantitative Auswertung. Wir ermitteln zunächst Kennzahlen zur Gesprächskultur. Dazu nehmen wir als Maß die Anzahl der gesprochenen Wörter. Von den 763 gesprochenen Wörtern der Szene entfallen 591 (77%) auf die Lernenden, nur 172

(23%) auf die Lehrkraft. Ähnlich sieht es bei den Anteilen in den kategorisierten Redebeiträgen aus, wobei Anteile, die als negative Diskursivität klassifiziert worden sind, nicht berücksichtigt werden: 563 (82%) zu 120 (18%). Die mittlere Länge eines Redebeitrags beträgt 17 Wörter für die Lehrkraft, 25 für die Lernenden. Dieses ungewöhnliche Verhältnis verschiebt sich noch, wenn man lediglich die kategorisierten Redeanteile (wieder ohne negative Diskursivität) zu Grunde legt: Die mittlere Länge eines Redebeitrags beträgt dann 12 Wörter für die Lehrkraft, 34 für die Lernenden.

Für genauere Analysen der Wirkmechanismen metakognitiver und diskursiver Aktivitäten ist deren Verteilung interessant. Die folgende Tabelle gibt die Anteile an allen klassifizierten Aktivitäten (wieder ohne negative Diskursivität) an:

	Planung	Monitoring	Reflexion	Diskursivität
Lehrkraft	0 %	0 %	8 %	92 %
Lernende	0 %	48 %	14 %	39 %

Dass sich in der letzten Zeile eine Summe über 100% ergibt, liegt an den Doppelkodierungen bei zwei Schüleräußerungen.

Wir hatten in unserer Einleitung auf die Bedeutung diskursiver Aktivitäten für das Wirksamwerden metakognitiver Aktivitäten hingewiesen. Die Auswertung der Unterrichtsszene zeigt hierfür ein beeindruckendes Beispiel: Die Rolle der Lehrerin besteht im Wesentlichen im Managen der Diskurse (Einleitung eines Diskurses und Verankerung von Diskusbeiträgen). Erst auf einem so hohen diskursiven Niveau ergeben sich Gelegenheiten, auch Stellen festzumachen, die diesem hohen Anspruch nicht gerecht werden (negative Diskursivität) und die Konsequenzen zu verfolgen.

Bezüglich Monitoring fällt auf, dass in dieser Szene nur die Lernenden Monitoring praktizieren und dieses in großem Umfang. Der überwiegende Teil dient der Kontrolle von Argumentationen. Dass regelmäßig auch Selbstüberwachung praktiziert wird, hängt mit der diskursiven Unterrichtskultur zusammen. Auch dazu passt der hohe Anteil diskursiver Aktivitäten bei den Lernenden.

Eine Behandlung der Frage, ob $0{,}\overline{9} = 1$ gilt, wird in der mathematikdidaktischen Literatur als für Lernende schwierig, aber kognitiv herausfordernd angesehen (vgl. TALL 1977, HENN 2001). Sie stellt hohe Anforderungen an die kognitiven und metakognitiven Kompetenzen aller Beteiligten: Man benötigt eine Kontrolle des Zusammenspiels zwischen Darstellungen und Vorstellungen; zur intellektuellen Bewältigung bedarf es der permanenten Überwachung von Terminologie und Argumentationen sowie des Unterschiedes zwischen Gesagtem und Gemeintem; methodisch ist ein gepflegtes Unterrichtsgespräch angesagt. Lange Phasen von Unterrichtsgesprächen bedürfen einer großen Gesprächsdisziplin. Ein Gelingen oder

Misslingen solcher gesprächsintensiven Unterrichtsphasen hinterlässt Spuren, die wir mit den hier vorgeführten Werkzeugen aufdecken können.

Die von TIMSS und PISA angestoßene Debatte um Qualität von Mathematikunterricht hat in der COACTIV-Studie unterschiedliche Faktoren wie Rahmenbedingungen und formale Unterrichtsmerkmale herausgearbeitet (KUNTER ET AL. 2006). Wir verstehen unseren Blick auf Mathematikunterricht als Ergänzung zu (Video)Studien zur Qualität der Interaktionsprozesse im Mathematikunterricht (vgl. z.B. HUGENER; PAULI; REUSSER 2006), mit dem Fokus auf metakognitive und diskursive Aktivitäten. Die Auswertung durch grafische Profile und der oben von uns berechneten Kennzahlen ermöglichen Vergleiche und Typisierungen von Unterrichtsskripts. In COHORS-FRESENBORG; KAUNE 2005 und KAUNE 2006 finden sich weitere Beispiele, die zeigen, wie sich das Werkzeug zur Analyse von Mathematikunterricht in Grundschule bis in der gymnasialen Oberstufe bewährt. Es hat sich darüber hinaus gezeigt, dass sogar schon während des Unterrichtsprozesses das Analysewerkzeug, verinnerlicht im Kopf eines Unterrichtenden, bewirken kann, verstärkt auf die Förderung metakognitiver und diskursiver Aktivitäten zu achten.

5 Literatur

BOEKAERTS, M. (1996): Teaching Students Self-Regulated Learning: A Major Success in Applied Research. In: GEORGAS, J. ET AL. (Hrsg.): *Contemporary Psychology in Europe*, Seattle: Hogrefe & Huber, S. 245-259.

BOEKAERTS, M. (1999): Self-Regulated Learning: where we are today. In: *International Journal of Educational Research,* 31, S. 445-457.

COHORS-FRESENBORG, E.; KAUNE, C. (2003a): Unterrichtsqualität: Die Rolle von Diskursivität für „guten“ gymnasialen Mathematikunterricht. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2003,* Hildesheim: Franzbecker, S. 173-180.

COHORS-FRESENBORG, E.; KAUNE, C. (2003b): Mechanismen des Wirksamwerdens von Metakognition bei Verstehensprozessen im Mathematikunterricht. In: HEFENDEHL-HEBEKER, L.; HUßMANN, S. (Hrsg.): *Mathematikdidaktik zwischen Fachorientierung und Empirie*, Hildesheim: Franzbecker, S. 21-34.

COHORS-FRESENBORG, E.; KAUNE, C. (2005): *Kategoriensystem für metakognitive Aktivitäten beim schrittweise kontrollierten Argumentieren im Mathematikunterricht.* Arbeitsbericht Nr. 44. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

DE CORTE, E.; VERSCHAFFEL, L.; OP'T EYNDE, P. (2000): Self-regulation: A characteristic and a goal of mathematics education. In: BOEKAERTS, M.; PINTRICH, P. R.; ZEIDNER, M. (Hrsg.): *Handbook of self-regulation*, San Diego: Academic Press, S. 687-726.

HENN, H.-W. (2001): Kreativität in einer neuen Unterrichtskultur, Erfahrungen beim baden-württembergischen BLK-Modellversuch. In: *mathematiklehren 106*, S. 15-16.

HUGENER, I.; PAULI, C.; REUSSER, K. (2006): *Dokumentation der Erhebungs- und Auswertungsinstrumente zur schweizerisch-deutschen Videostudie „Unterrichtsqualität, Lernverhalten und mathematisches Verständnis". Materialien zur Bildungsforschung, Band 15*. Frankfurt am Main: DIPF.

KAUNE, C. (2006): Reflection and Metacognition in Mathematics Education - Tools for the Improvement of Teaching Quality. In: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 38 (4), S. 350-360.

KILPATRICK, J. (1986): Reflection and Recursion. In: CARSS, M. (Hrsg.): *Proceedings of the Fifth International Congress on Mathematical Education*, Boston: Birkhäuser, S. 7-29.

KRAMARSKI, B.; MEVARECH, Z. R. (2003): Enhancing Mathematical Reasoning in the Classroom: The Effects of Cooperative Learning and Metacognitive Training. In: *American Educational Research Journal* 40 (1), S. 281-310.

KUNTER, M.; DUBBERKE, TH.; BAUMERT, J.; BLUM, W.; BRUNNER, M.; JORDAN, A.; KLUSMANN, U.; KRAUSS, ST.; NEUBRAND, M.; TSAI, Y.M. (2006): Mathematikunterricht in den PISA-Klassen 2004: Rahmenbedingungen, Formen und Lehr-Lernprozesse. In: PRENZEL, M. ET AL. (Hrsg.): *PISA 2003: Untersuchungen zur Kompetenzentwicklung im Verlauf eines Schuljahres*, Münster: Waxmann, S. 161-194.

POLYA, G. (1949): *Schule des Denkens*. Bern: Francke.

SCHOENFELD, A. H. (1992): Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In: GROUWS, D. A. (Hrsg.): *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, New York: Macmillan, S. 334-370.

TALL, D. (1977): Conflicts and Catastrophes in the Learning of Mathematics. In: *Math. Education for Teaching*, 2 (4), S. 3-18.

Anschrift der Verfasser

Prof. Dr. Elmar Cohors-Fresenborg
Universität Osnabrück,
Institut für Kognitive Mathematik
49069 Osnabrück
cohors@mathematik.uni-osnabrueck.de

Apl. Prof. Dr. Christa Kaune
Universität Osnabrück,
Institut für Kognitive Mathematik
49069 Osnabrück
ckaune@mathematik.uni-osnabrueck.de